

Cours de Mathématiques L1 Semestre 1

Serge Cohen
bureau 118 bat 1R3
Serge.Cohen@math.univ-toulouse.fr

9 septembre 2016

Organisation du cours

1 Programme

- Analyse : études de fonctions
 - fonctions réciproques
 - calculs de limites, tableaux de variation
 - intégrales et primitives
- Algèbre : nombres complexes et application,...

2 Méthode de travail

- 1 Cours en amphithéâtre
- 2 Plateforme Moodle <http://moodle.univ-tlse3.fr>
- 3 Questions interactives

3 Modalité de contrôle de connaissances

- 1 Contrôle 1 semaine du 10 octobre 20 %
- 2 Contrôle 2 semaine du 21 novembre 20 %
- 3 Interrogations en TD 15 %
- 4 Devoir Maison 5 % Wims
<http://wims.univ-tlse3.fr/wims/> DM1 pour le 26 septembre
- 5 Contrôle terminal rentrée 2017 40 %

Fonctions

Definition

On appelle **fonction** d'une variable réelle la donnée d'une correspondance $x \mapsto f(x)$, associant à tout élément x d'un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$, un unique nombre réel $f(x)$ appelé valeur de f au point x . L'ensemble D_f est appelé **domaine de définition** de f .

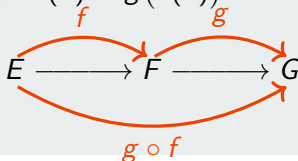
Exemple

- $\ln$ est une fonction dont le domaine de définition est $\mathbb{R}^{+*}$.
- $x \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ est une fonction dont le domaine de définition est $[0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Composée de fonctions

Definition

Soient E, F, G des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$. Alors la **composée** de f par g que l'on note $g \circ f : E \rightarrow G$ est la fonction définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.



Une question interactive

Soit

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = \mathbb{R}^+, \quad g(x) = x^2, \quad D_g = \mathbb{R}.$$

Quelle est la seule bonne réponse ?

A $g \circ f = f \circ g$

B $f \circ g(x) = |x|$

C $g \circ f(x) = |x|$

D $f \circ g(x) = x$

Composée de fonctions : un exemple

Exemple

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = \mathbb{R}^+, \quad g(x) = x^2, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$g \circ f(x) = (\sqrt{x})^2 = x \quad \text{et} \quad D_{g \circ f} = \mathbb{R}^+$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{et} \quad D_{f \circ g} = \mathbb{R}.$$

Donc $g \circ f \neq f \circ g$.

Domaine de définition d'une composée

Exemple

Soient E, F, G des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$. Notons $h = g \circ f$. Le domaine de définition de h est l'ensemble des x de E tels que $f(x)$ et $g(f(x))$ sont bien définies :

$$D_h = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}.$$

Exemple

Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{1-x}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Les domaines de définition de ces fonctions sont respectivement $D_f =]-\infty, 1]$ et $D_g = \mathbb{R}^$. Notons $h = g \circ f$.*

Suite de l'exemple

Exemple

Rappel $f(x) = \sqrt{1-x}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, on a $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

Le domaine de définition de h est

$$\begin{aligned} D_h &= \left\{ x \in \mathbb{R} : 1-x \geq 0 \text{ et } \sqrt{1-x} \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in]-\infty, 1] : \sqrt{1-x} \neq 0 \right\} \\ &=]-\infty, 1[. \end{aligned}$$

Non commutativité

Exemple

Soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 3$ et $g(x) = x^2$. A l'aide de ces deux fonctions, on peut obtenir deux fonctions composées bien distinctes : d'une part

$$\begin{aligned} f \circ g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 3 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} g \circ f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3)^2. \end{aligned}$$

On remarque qu'en général $f \circ g \neq g \circ f$.

Reconnaissance de forme

Le problème consiste à reconnaître une fonction comme une composée de deux fonctions.

Exemple

*Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $h_1(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ et $h_2(x) = 3\cos(x) + \frac{\pi}{3}$ s'écrivent très simplement comme les composées des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \frac{\pi}{3}$ et $g(x) = \cos(x)$.
En effet, $h_1 = g \circ f$ et $h_2 = f \circ g$.*

Rappel de la définition de dérivée

Definition

Soit f une fonction définie sur $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ pour $\varepsilon > 0$, on dit que f est **dérivable** en x si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe et est réel. Dans ce cas

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Rappel à connaître (et donc à réviser soi-même) sur les calculs de dérivées : Si f et g sont dérivables en x

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$
- Si $g(x) \neq 0$,

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{g(x)^2}$$

Dérivée d'une composée de fonction

Théorème

Soient E, F, G des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$. On suppose g dérivable sur un intervalle $J \subset F$ et f dérivable sur un intervalle $I \subset E$. On suppose également que pour tout x de I , $f(x)$ appartient à J . Alors dans ces conditions, la fonction $h = g \circ f$ définie par $h(x) = g(f(x))$ est dérivable sur I et

$$h' = f' \times (g' \circ f) \quad \text{autrement dit : } \forall x \in I, h'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Exemples de dérivée d'une composée

Exemple

1 $(\sin(2x))' = 2 \cos(x)$. Ici $f(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(x)$, et $f'(x) = 2$ et $g'(x) = \cos(x)$.

2 Posons $\varphi(x) = \sin\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right)$ calculons $\varphi'(x)$

Ici $\varphi(x) = f\left(\frac{x^3}{g(h(x))}\right)$, par exemple.

Suite du calcul

$$\text{Rappel } \varphi(x) = \sin\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right)$$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \sin'\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right) \times \left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right)' \\&= \cos\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right) \times \frac{3x^2 \cos(x^3) - x^3(\cos(x^3))'}{\cos^2(x^3)} \\&= \cos\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right) \times \frac{3x^2 \cos(x^3) - x^3(\cos'(x^3)) \times 3x^2}{\cos^2(x^3)} \\&= \cos\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right) \times \frac{3x^2 \cos(x^3) - 3x^5(\sin(x^3))}{\cos^2(x^3)}\end{aligned}$$