CM11-Nombres Complexes

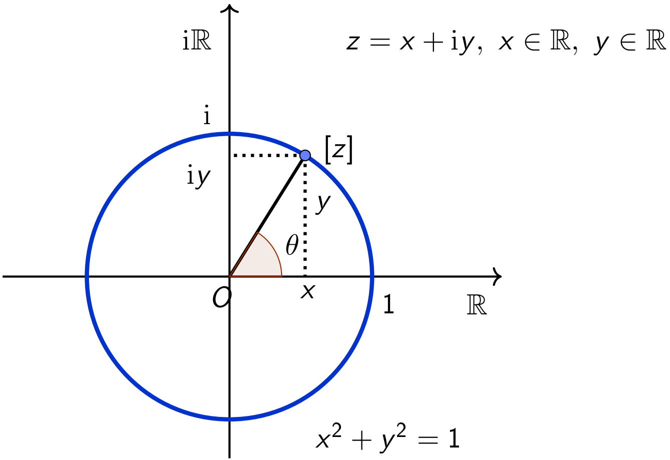
Complexes de module 1

C'est l'ensemble :

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

C'est le cercle de centre O et de rayon 1. **Cet ensemble est stable par produit et par quotient.** En particulier l'inverse de $z \in \mathcal{U}$, complexe de module 1, est $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ est aussi un complexe de module 1.

Complexes de module 1



Il existe donc un unique θ dans $[0, 2\pi[$ tel que $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta$ et le cercle $\mathcal{U}$ est paramétré par $z(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Complexes de module 1

Definition

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Proposition

$$e^{2\mathrm{i}\pi} = e^{0} = 1 \text{ et } \quad e^{\mathrm{i}\pi} = -1$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\overline{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta}$$

Complexes de module 1

Exercice

Positionner sur le cercle trigonométrique les points d'affixes
$-\mathrm{i},\ e^{\mathrm{i}\pi},\ e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},$
$e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}},\ \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},\ e^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},\ e^{-3\mathrm{i}\frac{\pi}{2}},\ e^{0},\ e^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

Complexes de module 1

Proposition (Formules d'Euler)

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Produit d'exponentielles complexes

Proposition

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$*,*

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Formule de Moivre

Proposition (Formule de Moivre)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{\mathrm{i}n\theta} = \left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n$$

Autrement dit :

$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n$$

Cette proposition se déduit de :

Produit d'exponentielles complexes

Proposition (A savoir par coeur)

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Question : si x est un nombre réel alors $(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x})^4$ vaut :

1. $-16\sin^4(x)$
2. $16\cos^4(x)$
3. $16\sin^4(x)$
4. $16\sin(4x)$

Exercice

A l'aide des formules d'Euler et de Moivre, ou des formules d'addition des cosinus et sinus, démontrer les formules suivantes de trigonométrie classique que, vous devez connaître ***par coeur***

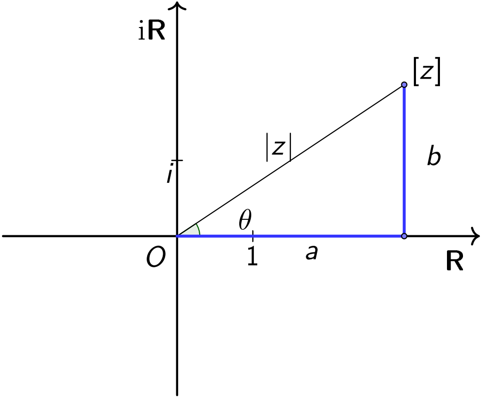
Proposition

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$
- $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$
- $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a-b) + \sin(a+b)$

Question : $\cos(\frac{7\pi}{6})$ vaut

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$
3. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

Argument d'un nombre complexe



Soit $z \neq 0$ alors $|\frac{z}{|z|}| = 1$.
L'***argument de z*** est l'unique $\theta \in [0, 2\pi[$,

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$$

Forme polaire

$$z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$$

est *l'écriture trigonométrique* de z, ou bien la *forme polaire* du nombre complexe z.

Proposition (Unicité de l'écriture (modulo 2π))

*Soit z un complexe **non nul**, il existe un unique $r > 0$ et un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $z = re^{i\theta}$. Le réel r strictement positif est le module de z et θ est son argument, noté $\mathrm{Arg}(z)$.*

Soient $r, r' > 0$ deux réels strictement positifs et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si

$$re^{i\alpha} = r' e^{i\beta}$$

alors :

$$r = r' \text{ et } \ \alpha = \beta \ \ [2\pi]$$

Argument d'un nombre complexe

Question : l'argument du nombre complexe $1 - \mathrm{i}$ est

1. $\dfrac{\pi}{4}$
2. $\dfrac{3\pi}{4}$
3. $\dfrac{5\pi}{4}$
4. $\dfrac{7\pi}{4}$

Proposition

Si $z, z' \neq 0$

- $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')[2\pi]$
- $\mathrm{Arg}(\frac{1}{z}) = -\mathrm{Arg}(z)[2\pi]$
- $\mathrm{Arg}(\frac{z}{z'}) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z')[2\pi]$

Argument d'un nombre de complexe

Question : Un argument de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ modulo $[2\pi]$ est :

1. $\dfrac{7\pi}{12}$
2. $\dfrac{5\pi}{12}$
3. $\dfrac{-\pi}{12}$
4. $\dfrac{5\pi}{6}$

Argument d'un nombre complexe

Exercice

Module et argument des complexes $-2\mathrm{i},\ (1+\mathrm{i}),\ (1+\mathrm{i})^{51},$
$-e^{\mathrm{i}\theta},\ \dfrac{-e^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{i}}.$

Exponentielle complexe

Soit $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = e^{a}e^{\mathrm{i}b}$$

Exponentielle complexe

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z)\exp(z') = \exp(z + z')$$

Question : La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (e^{\mathrm{i}t})^2$ est périodique de période :

1. 1
2. 2π
3. π
4. n'est pas périodique.