Cours Magistral 12 : translation

Une application bijective du plan dans lui-même est appelée ***transformation***. L'objet de ce qui suit n'est pas d'identifier toutes les transformations du plan mais seulement d'en étudier deux types : les translations et les rotations.

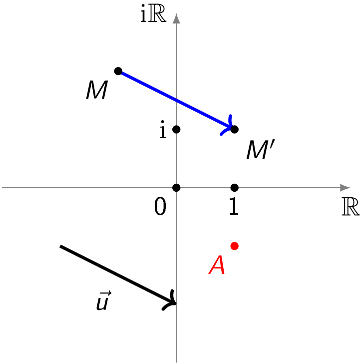
Definition

La ***translation*** de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Un exercice

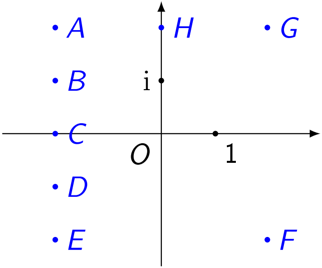
Exercice

Construisez, l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$ sur la figure ci-contre.



Transformation du plan

M est le point d'affixe $z_B + \mathrm{i}$ donc M est confondu avec :



- A
- B
- C
- D
- E
- F
- G
- H

- I : Aucun de ces points

Avec les complexes

Théorème

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. L'application du plan qui à tout nombre complexe z associe le nombre complexe d'affixe $z + a$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a. Elle s'écrit donc :

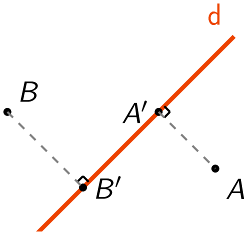
$$t : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a \end{array}$$

Réciproquement, toute translation du plan de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a peut s'écrire $z \mapsto z + a$.

Projection : est-ce une transformation ?

Est-ce que la projection orthogonale p sur la droite d représentée ci-contre est une transformation du plan ?

1. Oui
2. p est surjective mais pas injective donc ce n'est pas une transformation
3. p est injective mais pas surjective donc ce n'est pas une transformation
4. p n'est ni injective, ni surjective



Une question interactive

Si j'applique une translation T_1 de vecteur $\vec{u}$ à M, puis une translation T_2 de vecteur $\vec{v}$ à $T_1(M)$, la transformation $T_2 \circ T_1$

1. est une translation de vecteur $\vec{u} - \vec{v}$
2. est une rotation
3. est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

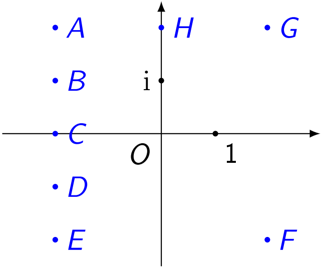
Définition d'une rotation

Definition

La ***rotation*** de centre Ω et d'angle α est l'application du plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha$.

Transformation du plan

M est le point d'affixe $\mathrm{i} \cdot z_H$ donc M est confondu avec :



- A
- B
- C
- D
- E
- F
- G
- H

- I : Aucun de ces points

Un exercice

Exercice (Complexes et transformations du plan)

1. *Étude d'un cas particulier :*
   On définit r comme l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}(z-3)+3$.
   1. *Placez les points* $A(3i)$, $B(3)$ *et* $C(3+3i)$.
   2. *Placez les points* $A' = r(A)$, $B' = r(B)$ *et* $C' = r(C)$ *après avoir calculé leurs affixes.*
   3. *Que semble faire la transformation r ?*
2. *Étude du cas général :*
   On définit à présent r comme la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe
   $z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$.
   1. *Démontrez que M et M′ sont sur un cercle de centre* $\Omega(\omega)$.
   2. *Calculez* $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)$
   3. *Que peut-on conclure ?*

Suite de l'exercice

Exercice

1. *Applications*
   1. *Démontrez que la transformation qui à tout point $M(z)$ du plan associe le point M' d'affixe*
      $z' = \mathrm{i}z - 2 - 4\mathrm{i}$ *est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.*
   2. *De façon générale, démontrez que toute transformation du plan de la forme $z \mapsto az + b$ avec $|a| = 1$ et $a \neq 1$ est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.*

Une question interactive

Si j'applique une rotation R_1 à M, puis une rotation R_2 à $R_1(M)$, la transformation $R_2 \circ R_1$

1. est toujours une rotation
2. est toujours une rotation ou une translation
3. est toujours une translation

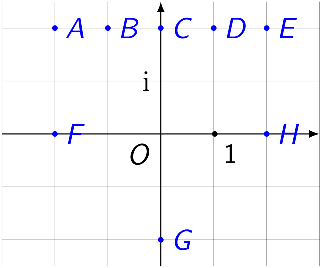
On vient donc de démontrer le théorème suivant :

Théorème (Ecriture complexe d'une rotation)

- *L'écriture complexe d'une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ radians est $z \mapsto e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$.*
- *Réciproquement, toute transformation s'écrivant $z \mapsto az+b$ avec $|a|=1$ et $a \neq 1$ est une rotation dont le centre $\Omega(\omega)$ vérifie $\omega = a\omega + b$.*

Transformation du plan

M est le point d'affixe $e^{\frac{i\pi}{2}}(z_B - z_D) + z_D$ donc M est confondu avec :



- A
- B
- C
- D
- E
- F
- G
- H

- I : Aucun de ces points

Est-ce que
$$z \mapsto e^{i\frac{\pi}{7}}(z - e^{\frac{i\pi}{2}}) + e^{\frac{i\pi}{2}}$$
est l'écriture complexe d'une rotation ?

1. Non car c'est l'écriture d'une translation.
2. Ce n'est ni l'écriture d'une translation ni celle d'une rotation.
3. Oui et l'angle de cette rotation est $\frac{\pi}{7}$.
4. Oui et l'angle de cette rotation est $\frac{\pi}{2}$.
5. Oui et l'angle de cette rotation est $\frac{9\pi}{14}$.