Cours de Mathématiques L1 Semestre 1

Serge Cohen
bureau 118 bat 1R3
Serge.Cohen@math.univ-toulouse.fr

3 novembre 2016

Definition

On appelle ***racine carrée*** d'un nombre complexe z_0 tout nombre complexe z tel que $z^2 = z_0$.

Théorème

Pour tout nombre complexe $z_0 \neq 0$, il existe exactement deux racines carrées distinctes de z_1 et z_2. Elles sont opposées l'une de l'autre. Si z_1 est une racine carrée de z_0, alors $z_2 = -z_1$ en est aussi une.

Question.

$1 + 5\mathrm{i}$ est une racine de z_0 donc on peut affirmer que :

1. $1 - 5\mathrm{i}$ est aussi une racine de z_0.
2. $-1 - 5\mathrm{i}$ est aussi une racine de z_0.
3. $-1 + 5\mathrm{i}$ est aussi une racine de z_0.
4. aucune réponse n'est correcte.

Question.

$1 + 5\mathrm{i}$ est une racine de z_0 donc on peut affirmer que :

1. $-1 - 5\mathrm{i}$ est une racine de $-z_0$.
2. $1 - 5\mathrm{i}$ est une racine de $-z_0$.
3. $-1 + 5\mathrm{i}$ est une racine de $-z_0$.
4. $5 + \mathrm{i}$ est une racine de $-z_0$.
5. $-5 + \mathrm{i}$ est une racine de $-z_0$.

Question.

$1 + 5\mathrm{i}$ est une racine de z_0 donc on peut affirmer que :

1. $-1 - 5\mathrm{i}$ est une racine de $\bar{z}_0$.
2. $1 - 5\mathrm{i}$ est une racine de $\bar{z}_0$.
3. $5 + \mathrm{i}$ est une racine de $\bar{z}_0$.
4. $-5 + \mathrm{i}$ est une racine de $\bar{z}_0$.

Question.

Choisissez la réponse la bonne réponse.

1. $\sqrt{3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$ est une racine carrée de $3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
2. $\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ est une racine carrée de $3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
3. $\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ est une racine carrée de $3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Calcul pratique des racines carrées :forme algébrique.

Pour déterminer les racines carrées de

$$z_0 = a + ib,$$

on procède par identification. On cherche $z = x + iy$ vérifiant

$$(x + iy)^2 = a + ib.$$

L'égalité des parties réelles, des parties imaginaires et des modules donnent

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \\ 2xy &= b, \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Exemple

Calculer les racines carrées de $z_0 = 3 - 4i$. *On résout*

$$x^2 - y^2 = 3,$$
$$2xy = -4,$$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5.$$

Finalement on trouve

$$z_1 = 2 - i \quad et \quad z_2 = -2 + i.$$

Exercice

Calculez les racines carrées de $z_1 = 1 - \mathrm{i}$*, de* $z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$*, de* $z_3 = 5\sqrt{3} + 5\mathrm{i}$ *et de* $z_4 = 1 - 7\mathrm{i}$.

Calcul pratique des racines carrées : forme trigonométrique.

Pour déterminer les racines carrées de

$$z_0 = r\, e^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

on procède par identification. On cherche $z = \rho\, e^{i\alpha}$ vérifiant

$$(\rho\, e^{i\alpha})^2 = r\, e^{i\theta}.$$

L'égalité des modules et des arguments donnent

$$\begin{aligned} &\rho^2 = r, \\ &2\alpha = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\rho = \sqrt{r}, \quad \alpha = \frac{\theta}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\theta}{2} + \pi.$$

Exemple

Calculer les racines carrées de $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$. *Les deux racines carrées sont*

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}} \quad et \quad z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)} = -e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Exercice

En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$ *et* $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Question.

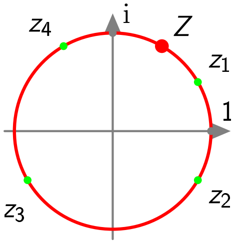
Choisissez la réponse la bonne réponse.

1. Une racine carrée de $1-\mathrm{i}$ est $\sqrt{1-i}$.
2. Une racine carrée de $1-\mathrm{i}$ est $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.
3. Une racine carrée de $1-\mathrm{i}$ est $e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$.
4. Une racine carrée de $1-\mathrm{i}$ est $e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.
5. Une racine carrée de $1-\mathrm{i}$ est $\sqrt{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.
6. Une racine carrée de $1-\mathrm{i}$ est $\sqrt{\sqrt{2}}e^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.
7. Une racine carrée de $1-\mathrm{i}$ est $\sqrt{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.

Complexes et Racines Carrées

Question. Choisissez la réponse la plus vraisemblable :

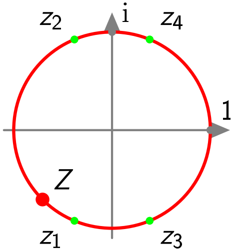
1. Les racines carrées de Z sont z_1 et z_2.
2. Les racines carrées de Z sont z_1 et z_3.
3. Les racines carrées de Z sont z_1 et z_4.
4. Les racines carrées de Z sont z_2 et z_3.
5. Les racines carrées de Z sont z_2 et z_4.
6. Les racines carrées de Z sont z_3 et z_4.



Complexes et Racines Carrées

Question. Choisissez la réponse la plus vraisemblable :

1. Les racines carrées de Z sont z_1 et z_2.
2. Les racines carrées de Z sont z_1 et z_3.
3. Les racines carrées de Z sont z_1 et z_4.
4. Les racines carrées de Z sont z_2 et z_3.
5. Les racines carrées de Z sont z_2 et z_4.
6. Les racines carrées de Z sont z_3 et z_4.



$$az^2 + bz + c = 0,\ \ a, b, c \in \mathbb{C} \text{ et } a \neq 0$$

Proposition

Appelons $\Delta := b^2 - 4ac$ le ***discriminant*** *de l'équation, et δ et $-\delta$ les deux racines carrées de Δ.*
Alors,

- *Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une seule solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$*
- *Si $\Delta \neq 0$, il y a deux racines distinctes qui sont*

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a},\ z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Équations du second degré

Question. Une équation de degré 2 à coefficients réels dont le discriminant est non nul admet deux solutions réelles ou deux solutions complexes conjuguées.

- Cette affirmation est fausse et je sais le démontrer.
- Je crois que cette affirmation est fausse.
- Je crois que cette affirmation est vraie.
- Cette affirmation est vraie et je sais le démontrer.

Équations du second degré

Question. Une équation de degré 2 à coefficients complexes dont le discriminant est strictement négatif admet deux solutions complexes conjuguées.

- Cette affirmation est fausse et je sais le démontrer.
- Je crois que cette affirmation est fausse.
- Je crois que cette affirmation est vraie.
- Cette affirmation est vraie et je sais le démontrer.

Exercice

Déterminez les racines de

$$P_1(X) = X^2 - X + 1 - \mathrm{i}, \qquad P_2(X) = 4X^2 - 4X + 9 - 6\mathrm{i}$$

$$P_3(X) = X^2 + (\mathrm{i} - 1)X - \mathrm{i}$$