

# Cours de Mathématiques L1 Semestre 1

Serge Cohen  
bureau 118 bat 1R3  
Serge.Cohen@math.univ-toulouse.fr

22 novembre 2016

**But** : intégrer des expressions contenant des puissances de  $\cos$  ou de  $\sin$ .

**Plan** :

- la formule du binôme,
- linéariser un polynôme trigonométrique,
- exprimer  $\cos(nx)$  ou  $\sin(nx)$  sous forme de polynômes en  $\cos(x)$  ou  $\sin(x)$ .

## Factorielle $n : n!$

On utilisera dans ce qui suit la notation suivante :

$$n! := 1 \times 2 \times \cdots \times n, \quad \text{avec la convention } 0! = 1.$$

Par exemple :

- $1! = 1.$
- $2! = 2.$
- $3! = 6, \text{ etc.}$

Choisissez la bonne réponse :

1  $\frac{11!}{10!} = 11$

2  $\frac{11!}{10!} = 10$

3  $\frac{11!}{10!} = 1,1$

4  $\frac{11!}{10!} = 1$

5  $\frac{11!}{10!} = 0$

6 je ne sais pas faire ce calcul sans calculatrice

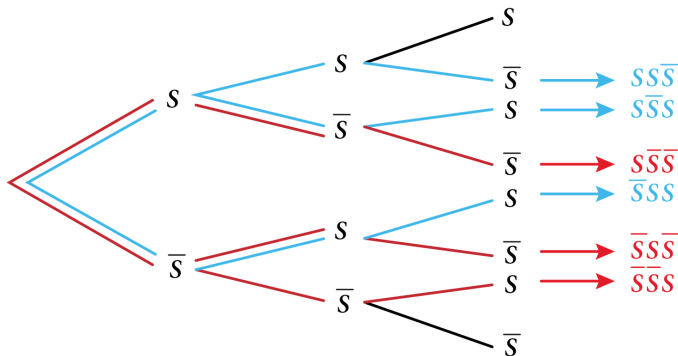
Soient  $n, k \in \mathbb{N}$  avec  $k \leq n$ . Les *coefficients binomiaux* sont :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}.$$

Ils se lisent «  $k$  parmi  $n$  ».

# Rappels

Dans un schéma de Bernoulli, il a été vu que le nombre de façons d'obtenir  $k$  succès lors de  $n$  itérations est égal à  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .



Nous avons toujours :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Et

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- etc.

1  $\binom{25}{25} = 0$

2  $\binom{25}{25} = 1$

3  $\binom{25}{25} = 25$

4  $\binom{25}{25} = 50$

5 J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.



1  $\binom{25}{0} = 0$

2  $\binom{25}{0} = 1$

3  $\binom{25}{0} = 25$

4  $\binom{25}{0} = 50$

5 J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.

1  $\binom{25}{5} < \binom{25}{20}$

2  $\binom{25}{5} = \binom{25}{20}$

3  $\binom{25}{5} > \binom{25}{20}$

4 J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.

1  $\binom{25}{1} = 0$

2  $\binom{25}{1} = 1$

3  $\binom{25}{1} = 25$

4  $\binom{25}{1} = 50$

5 J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.

# La formule du binôme de Newton

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour développer  $(a + b)^n$ , on utilise *la formule du binôme de Newton* :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

## Exemple

Cas  $n = 2$  :

- $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$
- $\binom{2}{1} = 2$

On retrouve ainsi :  $(a + b)^2 = b^2 + 2ab + a^2$ .

Comment calculer  $\binom{n}{k}$  ?

# Le triangle de Pascal

les relations de Pascal :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Cette formule permet aussi de calculer effectivement les coefficients du binôme grâce au *triangle de Pascal* :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & \\ 1 & & & 1 & & & & \\ 1 & & & & 1 & & & \\ 1 & & & & & 1 & & \\ 1 & & & & & & 1 & \\ 1 & & & & & & & 1 \end{array}$$

# Le triangle de Pascal

les relations de Pascal :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Cette formule permet aussi de calculer effectivement les coefficients du binôme grâce au *triangle de Pascal* :

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

À quoi est égal  $(a + b)^4$  ?

1  $a^4 + b^4$

2  $a^4 + 2ab + b^4$

3  $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

4  $a^4 + 4ab + b^4$

À quoi est égal  $(a - b)^3$  ?

1  $a^3 + b^3$

2  $a^3 - b^3$

3  $a^3 + 3ab + b^3$

4  $a^3 - 3ab - b^3$

5  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

6  $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

7  $-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$

8  $-a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$



*Linéariser une expression trigonométrique* c'est transformer des puissances et/ou des produits de cosinus et de sinus en sommes.

Les formules clés pour linéariser sont les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

## Méthode pour linéariser :

- 1 Remplacer les  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  par des exponentielles à l'aide des formules d'Euler.
- 2 Développer les puissances à l'aide de la formule du binôme de Newton et/ou développer les produits.
- 3 Transformer les exponentielles en cosinus et sinus à l'aide des formules d'Euler.

Commençons par linéariser  $\cos(x)^2$ .

$$\begin{aligned}\cos(x)^2 &\stackrel{1.}{=} \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \\ &\stackrel{2.}{=} \frac{1}{4} (e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \\ &\stackrel{3.}{=} \frac{1}{4} (2\cos(2x) + 2) \\ &= \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

## Exercice

- 1 **Linéarisons**  $\cos^3(x)$  et  $\sin^3(x)$  : il s'agit de les écrire en fonction de  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(2x)$ ,  $\sin(2x)$ ,  $\cos(3x)$  et  $\sin(3x)$ .
- 2 Linéarisons  $\cos^3(x) \sin^2(x)$ .
- 3 Calculons une primitive de  $\cos^3(x) \sin^2(x)$ .
- 4 Linéarisons  $\cos^2(x) \sin^3(x)$ . Que remarquons-nous ?



## Exercice

*Déterminons une primitive de  $\cos^4(x)$ .*



Si je sais qu'une seule égalité est fausse, laquelle est-ce ?

1  $\sin(x)^8 = \frac{35}{128} + \frac{\cos(8x)}{128} - \frac{\cos(6x)}{16} + \frac{7\cos(4x)}{32} - \frac{7\cos(2x)}{16}$

2  $\sin(x)^8 = \frac{35}{128} + \frac{\sin(8x)}{128} - \frac{\sin(6x)}{16} + \frac{7\sin(4x)}{32} - \frac{7\sin(2x)}{16}$

3 J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre à cette question.

Si je sais qu'une seule égalité est fautive, laquelle est-ce ?

1  $\sin(x)^7 = -\frac{\sin(7x)}{64} + \frac{7 \sin(5x)}{64} - \frac{21 \sin(3x)}{64} + \frac{35 \sin(x)}{64}$

2  $\sin(x)^7 = -\frac{\cos(7x)}{64} + \frac{7 \cos(5x)}{64} - \frac{21 \cos(3x)}{64} + \frac{35 \cos(x)}{64}$

3 J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre à cette question.

## Rappel : la formule de Moivre

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

$$\cos(nx) = \mathcal{R}e((\cos x + i \sin x)^n)$$

$$\sin(nx) = \mathcal{I}m((\cos x + i \sin x)^n)$$

puis on développe pour trouver une formule explicite pour  $\cos(nx)$   
et  $\sin(nx)$



## Exemple

*Regardons ce que ça donne par exemple pour  $\cos(5x)$  :*



## Exercice

- 1 *Donnez explicitement  $\cos(3x)$  et  $\sin(3x)$  en fonction de  $\cos x$  et  $\sin x$ , leur produit ou leur puissance.*
- 2 *Donnez explicitement  $\cos(4x)$  et  $\sin(4x)$  en fonction de  $\cos x$  et  $\sin x$ , leur produit ou leur puissance.*