Cours de Mathématiques L1 Semestre 1

Serge Cohen
bureau 118 bat 1R3
Serge.Cohen@math.univ-toulouse.fr

5 décembre 2016

Definition

Un polynôme P est ***irréductible*** s'il est non constant et s'il ne peut pas s'écrire comme un produit de deux polynômes tous deux non-constants. Autrement dit, si $P = QR$, alors Q est constant ou R est constant. Sinon, P est dit ***réductible***.

Est-ce le polynôme $X^2 + X + 1$ est un polynôme irréductible ?

1. Oui
2. Oui mais je ne sais pas pourquoi
3. Non mais je ne sais pas pourquoi
4. Non et je sais le démontrer
5. On ne peut pas savoir

Remarque

Attention : *quand on parle d'irréductibilité, il faut toujours préciser sur* $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$.
Par exemple, le polynôme $P(X) = X^2 + 1$ *est réductible sur* $\mathbb{C}$, *car on peut l'écrire comme produit de deux polynômes complexes :*

$$P(X) = X^2 + 1 = (X + \mathrm{i})(X - \mathrm{i}).$$

En revanche, on verra que P *est irréductible sur* $\mathbb{R}$, *c'est-à-dire qu'on ne peut pas l'écrire comme produit de deux polynômes à coefficients réels tous deux non-constants.*

$P \in \mathbb{R}[X]$. Choisissez la réponse la plus précise :

1. P non nul a une racine réelle $\Rightarrow$ P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$
2. P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ $\Rightarrow$ P a une racine réelle
3. P a une racine réelle $\Leftrightarrow$ P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$
4. Aucune de ces propositions n'est vraie.

$P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 alors :

1. P est irréductible et je sais le démontrer
2. P est irréductible mais je ne sais pas le démontrer
3. P n'est pas irréductible mais je ne sais pas le démontrer
4. P n'est pas irréductible et je sais le démontrer
5. Aucune de ces propositions n'est vraie.

$P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins 2. Choisissez la réponse la plus précise :

1. P n'a pas de racine réelle $\Rightarrow P$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$
2. P est irréductible dans $\mathbb{R}[X] \Rightarrow P$ n'a pas de racine réelle
3. P n'a pas de racine réelle $\Leftrightarrow P$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$
4. Aucune de ces propositions n'est vraie.

Le but de la suite de ce cours est de décomposer un polynôme réductible en produit de polynômes irréductibles. Il faut pour cela savoir caractériser les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Le cas complexe

Théorème (de D'Alembert. Admis)

Sur $\mathbb{C}$, tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 *admet au moins une racine.*

Le cas complexe

Théorème (Décomposition en polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ - (admis))

Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont les polynômes de degré 1.

Tout polynôme P de degré $n \geqslant 1$ se décompose en produit d'irréductibles sous la forme :

$$P(X) = a(X - r_1)^{m_1} \dots (X - r_k)^{m_k},$$

où a est le coefficient dominant de P, $r_1 \cdots, r_k$ les racines distinctes de P, $m_1 \cdots, m_k$ leur multiplicité respective. De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Le cas complexe

Remarque

Pour décomposer un polynôme sur $\mathbb{C}$, il suffit donc de connaître ***toutes*** *ses racines et leur multiplicité.*

Exemple

Les racines du polynôme $X^n - 1$ sont les racines n-èmes de l'unité, les $\zeta_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k/n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Sur $\mathbb{C}$, ce polynôme se décompose :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}).$$

Le cas réel

Proposition

Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels. Alors P est irréductible dans $\mathbb{R}$ si et seulement si son discriminant $b^2 - 4ac$ est strictement négatif.

Démonstration.

$\square$

Lien entre la décomposition dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

Lemme

Soit P un polynôme dont tous les coefficients sont réels. Alors un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est racine de P si et seulement si son conjugué $\bar{z}$ est aussi racine de P.
De plus, les deux racines z et $\bar{z}$ ont la même multiplicité.

Démonstration.

$\square$

Du cas complexe, au cas réel

Exercice

1. *Décomposer dans* $\mathbb{C}[X]$ *le polynôme* $X^4 + X^2 + 1$.
2. *Décomposer dans* $\mathbb{R}[X]$ *le polynôme* $X^4 + X^2 + 1$.

Exercice

1. *Décomposer dans* $\mathbb{C}[X]$ *le polynôme* $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
2. *Décomposer dans* $\mathbb{R}[X]$ *le polynôme* $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Le cas réel

Choisissez la bonne réponse :

1. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 3 admet une racine réelle.
2. Il existe des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 3 n'ayant aucune racine réelle.
3. J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre à la question.

Le cas réel

Choisissez la bonne réponse :

1. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 3 admet une racine réelle.
2. Il existe des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 3 n'ayant aucune racine réelle.
3. J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre à la question.

Les polynômes de degré impair de $\mathbb{R}[X]$

Démonstration.

Soit P un polynôme de degré impair de $\mathbb{R}[X]$.
Démontrons de deux façons différentes que P a au moins une racine réelle. $\square$

Le cas réel

Choisissez la bonne réponse :

1. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 3 est réductible.
2. Il existe des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 3 irréductible.
3. J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre à la question.

Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieurs ou égaux à 3

Démonstration.

Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 3 de $\mathbb{R}[X]$.
Démontrons que P est réductible. $\square$

Le cas réel

Théorème (Décomposition en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ - (conclusion des démos précédentes))

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ sont :

- *les polynômes de degré 1,*
- *les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.*

Le cas réel

Théorème

Ainsi, tout polynôme réel P se décompose en produit d'irréductibles sous la forme :

$$P(X) = a(X - r_1)^{m_1} \cdots (X - r_k)^{m_k}(X^2 + b_1 X + c_1)^{n_1} \cdots (X^2 + b_\ell X + c_\ell)^{n_\ell}, \tag{1}$$

où a est le coefficient dominant de P, $r_1, \ldots, r_k$ les racines réelles distinctes de P, $m_1, \ldots, m_\ell$ leur multiplicité respective, et les $X^2 + b_i X + c_i$ sont des polynômes distincts à coefficients réels vérifiant $b_i^2 - 4c_i < 0$.
De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Conclusions

Si P est polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré 6 alors, en comptant la multiplicité,

1. P admet 1 racine.
2. P admet 2 racines.
3. P admet 3 racines.
4. P admet 4 racines.
5. P admet 5 racines.
6. P admet 6 racines.
7. On ne peut pas savoir.

Conclusions

Si P est polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 6 alors, en comptant la multiplicité,

1. P admet au moins 1 racine.
2. P admet au moins 2 racines.
3. P admet au moins 3 racines.
4. P admet au moins 4 racines.
5. P admet au moins 5 racines.
6. P admet au moins 6 racines.
7. On ne peut pas savoir.

Conclusions

Si P est polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 7 alors, en comptant la multiplicité,

1. P admet au moins 1 racine.
2. P admet au moins 2 racines.
3. P admet au moins 3 racines.
4. P admet au moins 4 racines.
5. P admet au moins 5 racines.
6. P admet au moins 6 racines.
7. P admet au moins 7 racines.
8. On ne peut pas savoir.