Cours magistral 2 : Ensembles associés à une fonction

Definition

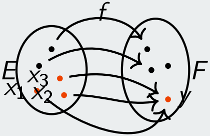
Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. Soit $y \in F$ un élément de l'ensemble d'arrivée. Un ***antécédent*** de y par f est un élément $x \in E$ de l'ensemble de départ tel que $f(x) = y$.

Un élément y peut ainsi avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents. L'ensemble des antécédents de y, éventuellement vide, est noté $f^{-1}(\{y\})$.

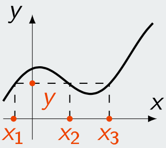
Un exemple d'antécédents

Exemple

Pour la fonctions f représentée par les deux dessins suivants :



et



,

l'élément y admet trois antécédents par f. Ce sont les éléments x_1, x_2, x_3.

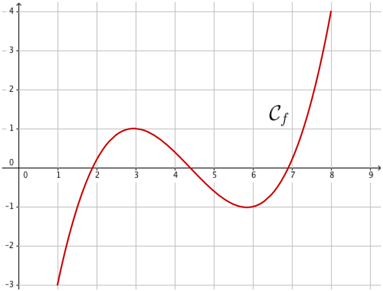
Ensemble image

Definition

Soit $f : E \to F$ une fonction.

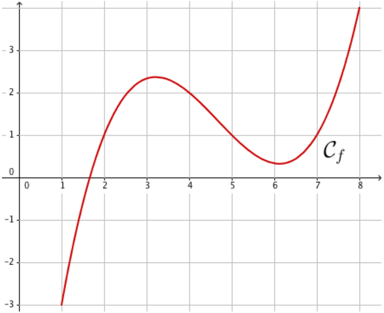
- Soit $A \subset E$ un sous-ensemble de l'espace de départ de f. L'***ensemble image*** de A par f est le sous-ensemble de F défini par
$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}.$$
C'est l'ensemble des éléments de F ayant au moins un antécédent dans A.
- Soit $B \subset F$ un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée de f. L'***image réciproque de l'ensemble*** B par f est le sous-ensemble de E défini par
$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$
C'est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f.

Question : f est la fonction définie par sa courbe donnée ci-dessous.



1. $f\left([1;6]\right) = [f(1); f(6)]$
2. $f\left([1;6]\right) = [-3; -1]$
3. $f\left([1;6]\right) = [-3; 1]$
4. J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.

Question : f est la fonction définie par sa courbe donnée ci-dessous.



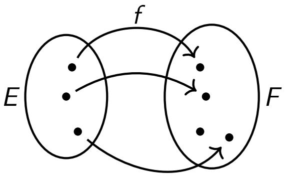
1. $f^{-1}([1;8]) = [-3;4]$
2. $f^{-1}([1;8]) = \left[f^{-1}(1); f^{-1}(8)\right]$
3. $f^{-1}([1;8]) = [2;5] \cup [7;8]$
4. $f^{-1}([1;8]) = [2;8]$
5. J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.

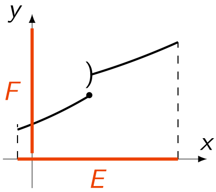
Injection

Definition

Une fonction $f : E \to F$ est ***injective*** si tout élément y de F a au plus un antécédent (et éventuellement aucun).

Les fonctions f représentées ci-dessous sont injectives :



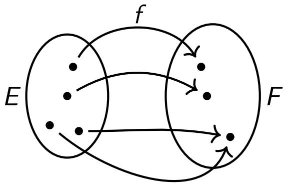


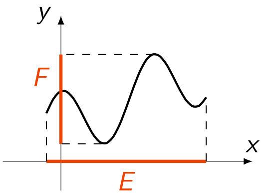
Surjection

Definition

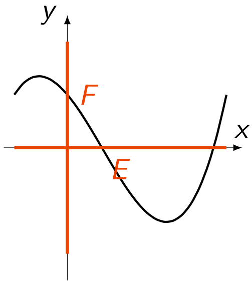
Une fonction $f : E \to F$ est ***surjective*** si tout élément y de F a au moins un antécédent. Autrement dit : f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Les fonctions f représentées ci-dessous sont surjectives :





Question : $f : E \to F$ est la fonction représentée ci-dessous. Les ensembles E et F sont marqués, sur les axes, en rouge.



1. f est injective mais pas surjective
2. f est surjective mais pas injective
3. f est injective et surjective
4. f est ni injective et ni surjective
5. J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre

Une autre formulation

Soit $f : E \to F$. Une autre formulation de l'injectivité et de la surjectivité est

- f est injective si et seulement si pour tout élément y de F, l'équation $f(x) = y$ a au plus une solution (et éventuellement aucune) dans E.
- f est surjective si et seulement si pour tout élément y de F, l'équation $f(x) = y$ a au moins une solution dans E.

Une question

Exemple

À l'aide de dessins similaires aux dessins précédents, représenter deux fonctions non injectives, ainsi que deux fonctions non surjectives.

Exemple

Soit $f_1 :]0; +\infty[\to \mathbb{R}^{+*}$ *définie par* $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$. *Montrons que* f_1 *est injective :*

Stricte monotonie et injectivité

Rappel : une fonction est ***strictement croissante*** sur un intervalle I, si

$$\forall x,\ y \in I \quad x < y \implies f(x) < f(y),$$

strictement décroissante si

$$\forall x,\ y \in I \quad x < y \implies f(y) < f(x).$$

.

Propriété

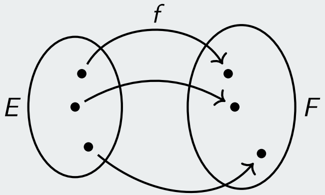
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante (ou strictement décroissante). Alors la fonction f est injective.

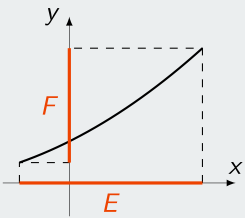
Bijection

Definition

Une fonction f est ***bijective*** si elle injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit : $\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad \big(y = f(x)\big)$

Exemple





Comment devenir une bijection ?

Exemple

$\sin : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *n'est pas injective.*
En effet par exemple $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$, *donc* 0 *a plus d'un antécédent.*
$\sin : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *n'est pas surjective.*
En effet : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin(x| \leqslant 1$, *donc* 2 *n'a pas d'antécédent.*
Mais $\sin :] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\mapsto \mathbb{R}$ *est injective,*
car $\forall x \in] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \quad \sin'(x) = \cos(x) > 0$ *et* $\sin$ *est donc strictement croissante.*
$\sin :] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\mapsto \mathbb{R}$ *n'est pas surjective.*
mais $\sin :] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\mapsto] - 1; 1[$ *est une bijection.*

Une question difficile

Exercice

Existe-t-il une bijection entre $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{R}$ *?*