Cours magistral 3 : Théorème de la bijection

Une bijection admet une fonction réciproque . La calculer, c'est trouver des antécédents ! Si f est une bijection alors tout $y \in F$ a un unique antécédent $x = f^{-1}(y)$.

$$\begin{cases} f(x) & = & y \\ x & \in & E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & f^{-1}(y) \\ y & \in & F \end{cases}$$

Proposition

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

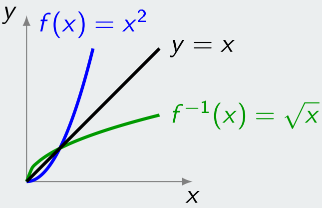
1. *La fonction f est bijective si et seulement s'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que pour tout $y \in F$, $(f \circ g)(y) = y$ et pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(x) = x$.*
2. *Si la fonction f est bijective, alors la fonction g est unique et elle aussi est bijective. La fonction g s'appelle la* ***bijection réciproque*** *de f et est notée f^{-1}. De plus $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.*

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *définie par* $f(x) = x^2$ *est bijective, sa bijection réciproque est* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *définie par* $g(y) = \sqrt{y}$*. Nous avons bien* $\forall x \geqslant 0,\ (\sqrt{x})^2 = x$ *et* $\forall x \geqslant 0,\ \sqrt{x^2} = x$*.*

Remarque

On peut aussi démontrer que dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f *et* f^{-1} *sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation* $y = x$*).*



A vous de trouver une fonction réciproque

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Quelle est la seule bonne réponse ?

A Si $E = F = \mathbb{R}^{+*}$, f est bijective et $f^{-1}(x) = x$

B Si $E = F = \mathbb{R}^{+*}$, f est bijective et $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

C Si $E = F = \mathbb{R}$, f est bijective et $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

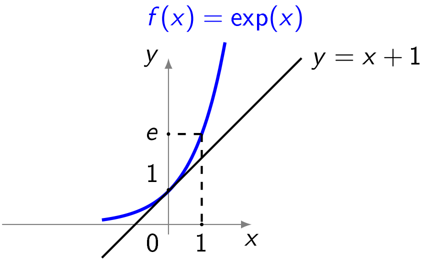
D f n'est pas injective

Exponentielle et logarithme népérien

Le lien entre l'exponentielle et le logarithme népérien a déjà été vu en terminale.

Rappel sur l'exponentielle :

L'***exponentielle*** est l'unique fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. On prouve que $\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.



La tangente à la courbe exponentielle en $(0,1)$ est la droite d'équation $y = x + 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Logarithme népérien

Le logarithme népérien est la fonction réciproque de l'exponentielle.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \exp(x) & = & y \\ x & \in & \mathbb{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & ln(y) \\ y & \in & \mathbb{R}_+^* \end{array} \right. \tag{1}$$

Proposition

On a $\ln(\exp(x)) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $\exp(\ln(y)) = y$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}_+^*$. *La fonction* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *est donc la bijection réciproque de la fonction* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *(et réciproquement).*

Question

Si f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=x^3-1$ alors sa fonction réciproque f^{-1} est définie par :

1. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$
3. $\sqrt[3]{x+1}$
4. $\sqrt[3]{x}-1$
5. $\sqrt[3]{x}+1$
6. $\sqrt[3]{x-1}$
7. J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.

Théorème de la bijection (cas dérivable)

Théorème

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction bijective, continue et dont la réciproque f^{-1} est continue. Soit $x_0 \in I$ tel que f soit dérivable en x_0. Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. Dans ce cas, on a $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ ou encore $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Si $I =]0, \infty[$, et $f(x) = x^2$ $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ et $J =]0, \infty[$. Calculons $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \dfrac{1}{f'(\sqrt{2})} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.