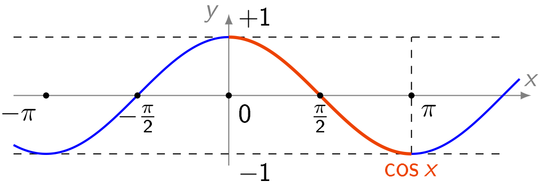
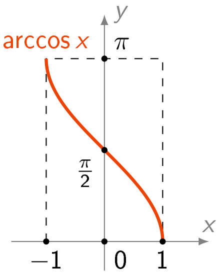
Cours magistral 4 : Réciproques des fonctions trigonométriques

Trouvons une fonction réciproque de cos. D'abord $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ n'est pas une bijection. Mais $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est continue et strictement décroissante. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arccosinus*** :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \cos(x) & = & y \\ x & \in & [0, \pi] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \arccos(y) \\ y & \in & [-1, 1] \end{array} \right.$$


y
+1
x
−π
−π/2
0
π/2
π
−1
cos x


y
arccos x
π
π/2
x
−1
0
1

Propriétés d'arccosinus

$$\cos\big(\arccos(x)\big) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$
$$\arccos\big(\cos(x)\big) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

Mais que se passe-t'il si $x \notin [0, \pi]$?

Exemple

$$\arccos\Big(\cos\Big(\frac{-\pi}{2}\Big)\Big) = \arccos\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \frac{\pi}{2}$$

Terminons avec la dérivée de arccos :

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

Calcul de la dérivée de arccosinus

Rappelons que $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ où $f(x) = \cos(x)$. Donc pour $x \in]-1,1[$ $\arccos'(x) = \dfrac{1}{-\sin(\arccos(x))}$. Que vaut $\sin(\arccos(x))$? Ce que l'on sait $\cos\big(\arccos(x)\big) = x$ et

$$\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$$

Donc

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2\big(\arccos(x)\big)$$

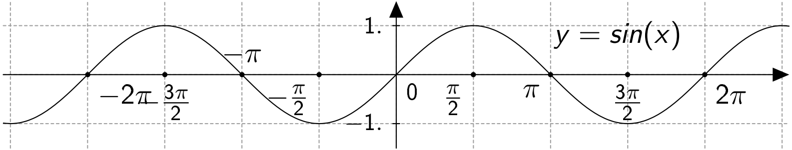
$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$$

Or $\arccos(x) \in]0, \pi[$ et $\sin(\arccos(x)) > 0$. Donc

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

Question :



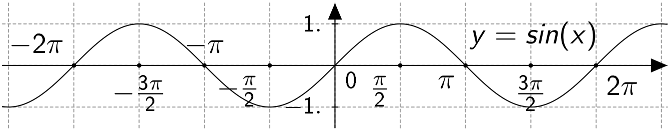
La fonction

$$f: \begin{array}{l} [0;\pi] \to [-1;1] \\ x \mapsto \sin(x) \end{array}$$

est bijective.

1. Vrai et j'en suis sûr
2. Vrai mais je n'en suis pas très sûr
3. Faux mais je n'en suis pas très sûr
4. Faux et j'en suis sûr
5. Je ne sais pas répondre

Question :



$$f : \begin{array}{l} A \to B \\ x \mapsto \sin(x) \end{array}$$

est bijective lorsque

1. $A = [0; \pi]$ et $B = [0; 1]$
2. $A = [0; \pi]$ et $B = [-1; 0]$
3. $A = [-\pi; \pi]$ et $B = [-1; 1]$
4. $A = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $B = [-1; 1]$
5. $A = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $B = [0; 1]$

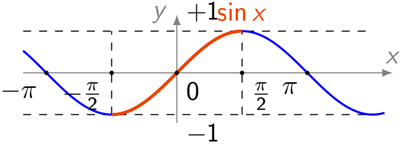
Arcsinus

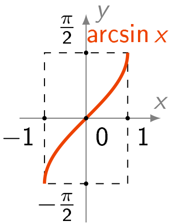
La restriction

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arcsinus*** :

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$





Définition et propriété

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sin(x) & = & y \\ x & \in & [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \arcsin(y) \\ y & \in & [-1, 1] \end{array}\right.$$

$$\sin\big(\arcsin(x)\big) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$
$$\arcsin\big(\sin(x)\big) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

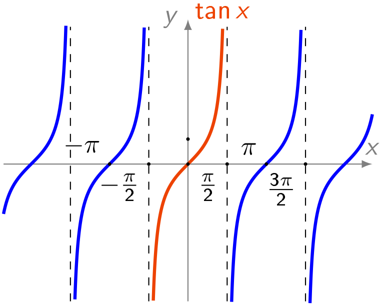
Arctangente

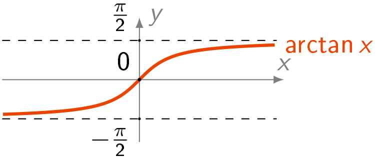
La restriction

$$\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arctangente*** :

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$$





Définition et propriété

$$\left\{\begin{array}{lll}\tan(x) & = & y\\ x & \in &]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll}x & = & \arctan(y)\\ y & \in &]-\infty, +\infty[\end{array}\right.$$

$$\tan\big(\arctan(x)\big) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan\big(\tan(x)\big) = x \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Un exercice

Exercice

1. *Représentez la fonction* $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$.
2. *Représentez la fonction* $x \mapsto \sin(\arcsin(x))$.