Cours magistral 5 : Étude de fonctions, parité, périodicité, symétrie, translation

Symétries :

Definition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a, a[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

- f est ***paire*** si $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,
- f est ***impaire*** si $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).

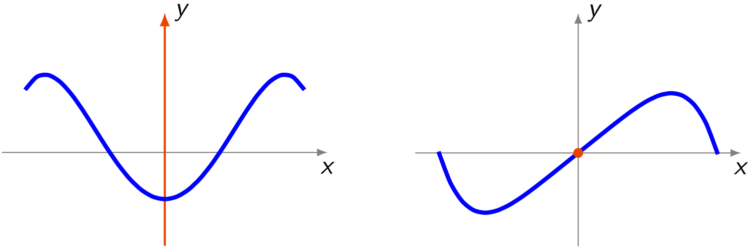
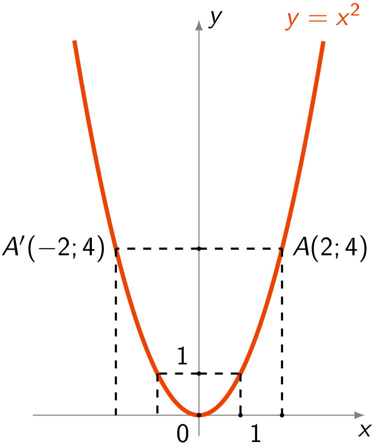


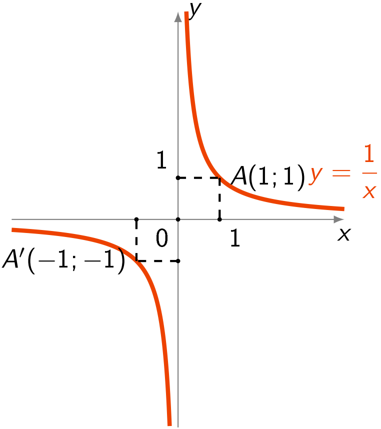
Figure: Une fonction paire à gauche, une fonction impaire à droite

Des exemples



La fonction carré est une ***fonction paire***, sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Une fonction impaire classique



La fonction inverse est une ***fonction impaire***, sa courbe représentative admet l'origine comme centre de symétrie.

Question

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et f est paire et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

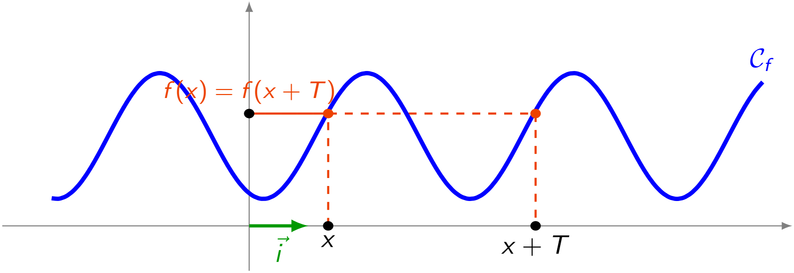
1. f' est paire
2. f' est impaire et f'' paire
3. f' n'est ni forcément paire ni forcément impaire
4. J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.

Périodicité

Definition

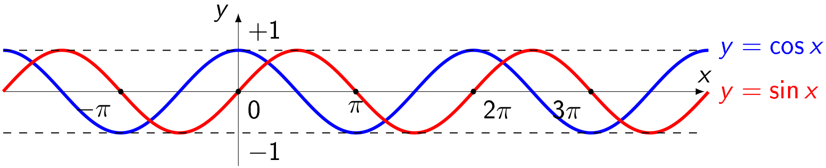
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite ***périodique*** de période T si
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$.

Figure: Fonction périodique



Deux exemples classiques

Figure: Fonction sinus et cosinus



Un raisonnement par récurrence

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *périodique de de période* $T > 0$ *alors* $\forall n \in \mathbb{N}$, nT *est aussi une période de* f.

Démonstration.

On doit montrer $H_n = \{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + nT) = f(x)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On fait un raisonnement par récurrence. Pour que cela marche on doit montrer H_1 (ici c'est gratuit !) et $H_n \Rightarrow H_{n+1}$. Pour montrer H_{n+1}, considérons $f(x + (n+1)T) = f((x + nT) + T)$ et comme T est une période de f :
$f((x + nT) + T) = f(x + nT) = f(x)$ si H_n est vraie. On en déduit que si H_n est vraie alors $f(x + (n+1)T) = f(x)$ et H_{n+1} est vraie $\square$

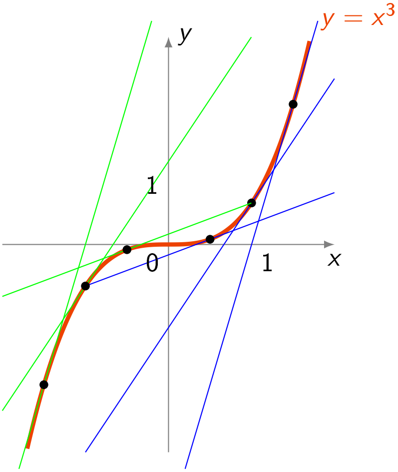
Notion de concavité-convexité

Definition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- On dit que f est ***convexe*** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que f est ***concave*** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est située en-dessous de chacune de ses tangentes.

Graphiquement



Sur $\mathbb{R}^-$, la courbe représentative de la fonction cube est en-dessous de ses tangentes : la fonction cube est ***concave*** sur $\mathbb{R}^-$.

Sur $\mathbb{R}^+$, la courbe représentative de la fonction cube est au-dessus de ses tangentes : la fonction cube est ***convexe*** sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction cube change de convexité au point d'abscisse 0. On dit que c'est un ***point d'inflexion***.

Comment montrer qu'une fonction est concave ou convexe ?

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- *f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ sur I.*
- *f est concave sur I et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ sur I.*
- *a est un **point d'inflexion** de f si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.*

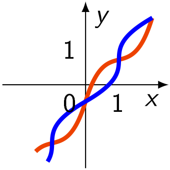
Un exercice corrigé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(x^3 - 6x^2 + 13x - 4\right)$.

$f'(x) = \dfrac{1}{4}\left(3x^2 - 12x + 13\right)$ et est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



Un argument permet néanmoins de rejeter ces deux courbes, lequel ?

Suite de l'exercice corrigé

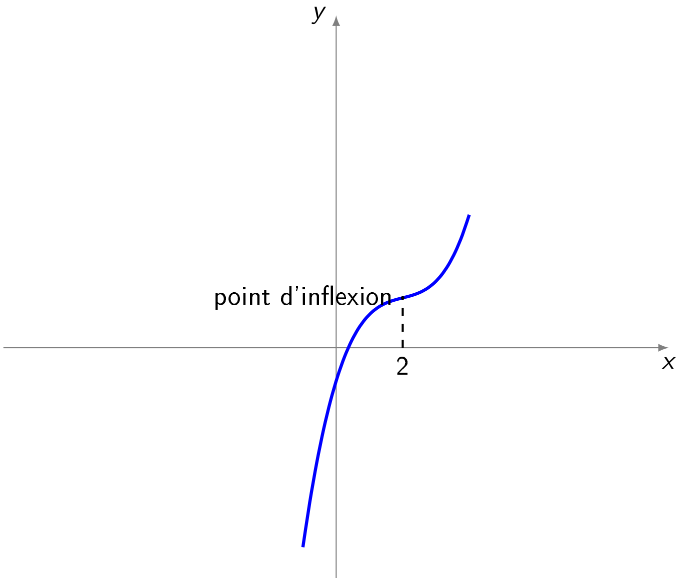
$$f(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 6x^2 + 13x - 4\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(3x^2 - 12x + 13\right)$$

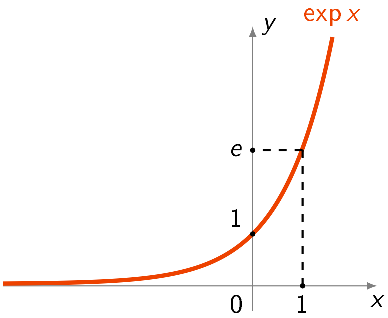
$$f''(x) = \frac{1}{4}(6x - 12)$$

$f''(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 2$ donc f est convexe après 2
$f''(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant 2$ donc f est concave avant 2
$f''(2) = 0$ f admet un point d'inflexion en 2.

Graphe de f



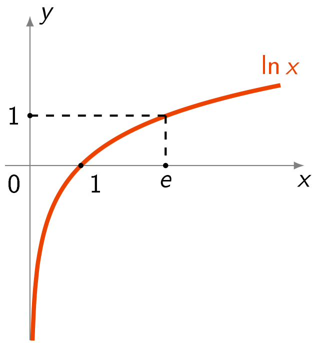
retour sur l'exponentielle



La Fonction Exponentielle

C'est une fonction convexe !

Logarithme Népérien



Fonction Logarithme Népérien

$\ln''(x) = (1/x)' = -1/x^2$ c'est une fonction concave.