Définition de limite

Definition (Historique, Cauchy 19 ième siècle)

Soient a et l deux nombres réels. On dit qu'une fonction f admet l pour limite quand x tend vers a, si les nombres $f(x)$ deviennent arbitrairement proches de l pourvu que les points x s'approchent suffisamment de a. On note $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

On a aussi des limites $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$. Il faut remplacer "pourvu que les points x s'approchent suffisamment de a. " par "pourvu que les points x deviennent suffisamment grand.

Cours magistral 7 : calcul de limites

Si $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) =$	$L \in \mathbb{R}$			$+\infty$		$-\infty$
et $\lim\limits_{t\to\alpha} v(t) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{t\to\alpha} [u(t) + v(t)] =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Produit de deux fonctions

Si $\lim\limits_{t \to \alpha} u(t) =$	L	$L \neq 0$	0	$\pm\infty$
et $\lim\limits_{t \to \alpha} v(t) =$	L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{t \to \alpha} [u(t) \times v(t)] =$	LL'	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$

Quotient de deux fonctions

Si $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) =$	L	L	$L \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
et $\lim\limits_{t\to\alpha} v(t) =$	$L' \neq 0$	$\pm\infty$	0	L'	0	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{t\to\alpha} \dfrac{u(t)}{v(t)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$\pm\infty$ [a]	$\pm\infty$	FI	FI

a. attention : si v n'est pas de signe constant au voisinage de α, le quotient n'a pas de limite

Théorème d'encadrement

Theorem

Soient f g, h *trois fonctions définies sur un intervalle* I *contenant* a *et que*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \quad x \in I$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

$$\lim_{x \to a} h(x) = L,$$

alors

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Si $a = +\infty$, I est dela forme $[m, +\infty[$.

Question : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ signifie que si x_1 est plus grand que x_2 alors $f(x_1)$ est plus proche de L que $f(x_2)$.

1. Cette proposition est fausse et je sais expliquer pourquoi.
2. Cette proposition est fausse mais je ne sais pas dire pourquoi.
3. Cette proposition est vraie mais je ne sais pas dire pourquoi.
4. Cette proposition est vraie et je sais expliquer pourquoi.

Question : La limite de $\dfrac{10^8 x + 1}{x^2}$ en $+\infty$ est :

1. n'existe pas
2. 0
3. 1
4. 10^8
5. $+\infty$
6. C'est une forme indéterminée, on ne peut pas conclure.

Question : La limite de $x\cos(x)$ en $+\infty$ est :

1. n'existe pas
2. 0
3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. 2π
5. $-\infty$
6. $+\infty$
7. C'est une forme indéterminée, on ne peut pas conclure.

Question : La limite de $\dfrac{x}{\cos(x)}$ en $+\infty$ est :

1. n'existe pas
2. 0
3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. 2π
5. $-\infty$
6. $+\infty$
7. C'est une forme indéterminée, on ne peut pas conclure.

Composée de deux fonctions

Théorème (Admis)

Soit u, g deux fonctions, α , β *et* γ *trois réels ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

Si $\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{t\to\alpha} u(t) & = & \beta \\ \lim\limits_{x\to\beta} g(x) & = & \gamma \end{array}\right\}$ *alors* $\lim\limits_{t\to\alpha} g(u(t)) = \gamma$

Question : Quelle est la limite de

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

en 0 avec $x > 0$?

1. $-\infty$
2. $-\dfrac{\pi}{2}$
3. -1
4. 0
5. 1
6. $\dfrac{\pi}{2}$
7. $+\infty$

Question : Quelle est la limite de

$$\arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

en $-\infty$.

1. $-\infty$
2. $-\dfrac{\pi}{2}$
3. -1
4. 0
5. 1
6. $\dfrac{\pi}{2}$
7. $+\infty$

Théorème (Comparaison exponentielle et polynômes à l'infini)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

et plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

et plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x \times x^n = 0$$

Exercice

Calculez

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} + x$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - x}{e^x + 1}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3 + 4x^2 + x + 1}$

Théorème (Croissances comparées)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ \ln(x) = 0$$

Démonstration.

$\square$

Exercice

1. $$\lim_{x \to +\infty} 3x - 2\ln(x)$$

2. $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^n}$$

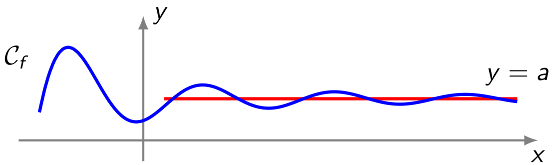
3. $$\lim_{x \to +\infty} x^n \times \ln(x) \quad avec\ n \geqslant 1$$

Asymptotes

Definition

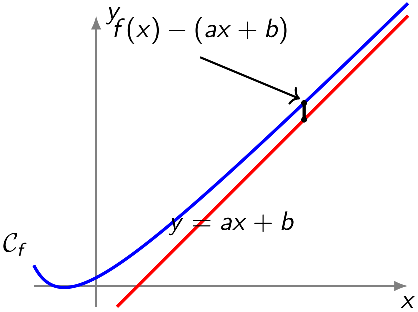
Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ (respectivement $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$), on dit que la droite d'équation $y = l$ est une ***asymptote horizontale*** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Illustration



Definition

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et a, b deux réels.
Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ (respectivement $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$), on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une ***asymptote oblique*** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).



y
$f(x) - (ax + b)$
$y = ax + b$
$\mathcal{C}_f$
x

Exercice

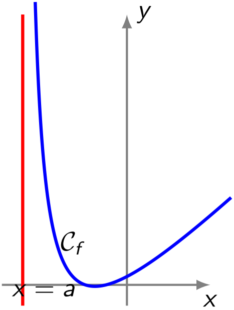
Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x-2}$ *et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.*
Déterminez l'asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Exercice

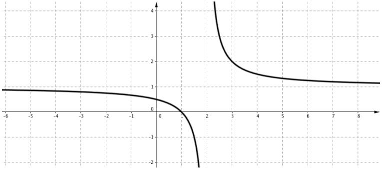
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par* $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ *et* $\mathcal{C}_f$ *sa courbe représentative.*
Démontrez que $\mathcal{C}_f$ *n'admet aucune asymptote oblique en* $+\infty$.

Definition

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =^{+}_{-} \infty$ ou si $\lim\limits_{x \to a^{+}} f(x) =^{+}_{-} \infty$ ou si $\lim\limits_{x \to a^{-}} f(x) =^{+}_{-} \infty$ alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une ***asymptote verticale*** d'équation $x = a$.



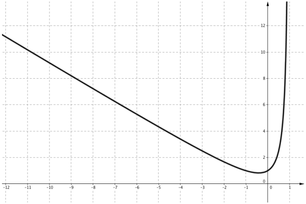
Question : f est la fonction représentée ci-dessous.



Quelle expression donneriez-vous à $f(x)$?

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$
3. $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$

Question : f est la fonction représentée ci-dessous.



Quelle expression donneriez-vous à $f(x)$?

1. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
2. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$
3. $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
5. $f(x) = \dfrac{1+x}{x-1}$
6. $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x-1}$