Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III) | **Année universitaire**
Département de mathématiques | **2019-2020**
L2 Maths, UE d'Analyse numérique

Feuille de TD 1 - Correction : Interpolation de Lagrange

Exercice 1. (Identification)
On considère $x, y \in \mathbb{R}^4$ donnés par : $x = [-2, 0, 1, 2]$ et $y = [4, 0, 0, 4]$. Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation P aux points x, y (justifiez votre réponse) ?

1. $P_1(X) = X^4 - \frac{2}{3}X^3 - 3\,X^2 + \frac{8}{3}X$
2. $P_2(X) = \frac{4}{3}X^2 - \frac{4}{3}$
3. $P_3(X) = \frac{1}{3}X^3 + X^2 - \frac{4}{3}X.$

Correction : On ne demande pas ici de calculer le polynôme mais de l'identifier. On va donc utiliser la caractérisation équivalente (liée à l'unicité) du polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points x, y :

$$\begin{aligned} &P \text{ pol d'interp. de Lagrange associé à } x, y \\ &\iff (\deg(P) \leqslant 3,\ P(-2) = 4,\ P(0) = 0,\ P(1) = 0,\ P(2) = 4) \end{aligned} \tag{1}$$

Il n'y a plus qu'à trouver le polynôme qui satisfait toutes les propriétés de (1) (l'existence et l'unicité du théorème du cours garantit qu'il existe et est unique). Le polynôme P_1 est de degré 4, il est donc éliminé. Le polynôme P_2 a un terme constant non nul : il ne s'annule pas en 0, il est donc éliminé. Reste le polynôme P_3, on vérifie qu'il convient, c'est donc lui.

Exercice 2. (Existence et unicité)

1. Montrez qu'il existe une infinité de polynômes de degré 2 dont le graphe passe par les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$.

   Correction : Cherchons les polynômes de degré 2 $p(x) = ax^2 + bx + c$ tels que $p(0) = 0$ et $p(1) = 0$. Ce qui est équivalent au système linéaire

   $$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

   En le résolvant, on obtient $p(x) = ax(x-1)$ sans condition sur a, ce qui correspond bien à une infinité de polynômes de degré 2.

2. Montrez qu'il n'existe pas de polynôme de degré 2 passant par les points $(0, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 15)$ et $(3, 40)$.

   Correction : Comme dans la question précédante, on cherche $p(x) = ax^2 + bx + c$ tels que $p(0) = 1$, $p(1) = 4$, $p(2) = 15$ et $p(3) = 40$. Ce qui est équivalent au système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} c = 1 \\ a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 15 \\ 9a + 3b + c = 40 \end{array} \right.$$

   En le résolvant, on trouve qu'il n'y a pas de solution, ce qui conclut la question.

Exercice 3. (Construction... Malin ou bourrin ?)
Remarque : C'est un bon exercice ici, maintenant que vous avez du recul d'essayer les différentes façons de calculer un polynôme d'interpolation.
Calculer les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points suivants :

a. $x = [-1, 2, 3]$ et $y = [4, 4, 8]$

   Correction : On calcule la base de Lagrange associée à x :

$$L_0(X) = \frac{1}{12}(X-2)(X-3),\ L_1(X) = \frac{-1}{3}(X+1)(X-3),\ L_2(X) = \frac{1}{4}(X+1)(X-2)$$

   et alors $P_a(X) = 4L_0(X) + 4L_1(X) + 8L_2(X)$.
   IMPORTANT : Il n'est pas demandé/nécessaire/souhaitable de développer les polynômes de la base de Lagrange ni même de développer P_a, vous allez ajouter des erreurs et le résultat final sera faux.

b. $x = [-2, -1, 0, 1]$ et $y = [0, -2, -4, 0]$

   Correction : Ici on voit que le polynôme a 2 racines : -2 et 1. Cela signifie qu'il peut être factorisé par $(X + 2)(X - 1)$, c'est à dire qu'il existe un polynôme Q tel que $P_b(X) = Q(X)(X + 2)(X - 1)$. Comme on sait que $\deg(P_b) \leqslant 3$, alors nécessairement Q est de degré inférieur ou égal à 1 : $Q(X) = aX + b$.
   On cherche maintenant a et b en utilisant les autres valeurs :

$$P_b(-1) = -2,\ P_b(0) = -4$$

   ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} -2(-a + b) = -2 \\ -2b = -4 \end{array} \right.$$

   ce qui donne $b = 2,\ a = 1$ soit $P_b(X) = (X + 2)^2(X - 1)$. Bien sûr, on vérifie a posteriori que P_b convient bien.

c. $x = [-1, 0, 1, 2]$ et $y = [6, 2, 0, 0]$

Correction : Ici on procède de la même manière que précédemment en remarquant que 1 et 2 sont racines de P_c. On obtient par le même raisonnement que précédemment

$$P_c(X) = -(X-2)(X-1).$$

REMARQUE : On peut évidemment calculer P_b et P_c en calculant les polynômes de degré 3 de la base de Lagrange, mais il n'est pas nécessaire de calculer TOUS les polynômes de la base : seuls les polynômes où P ne s'annule pas sont utiles (en l'occurence L_2 et L_3 pour P_b, L_1 et L_2 pour P_c).

d. $x = [-1, 0, 1]$ et $y = [1, 0, 1]$

Correction : Ici un simple coup d'oeil permet de constater que X^2 convient, par unicité, on sait donc que $P_d(X) = X^2$.

e. $x = [-3, -1, 2, 10]$ et $y = [-3, -1, 2, 10]$

Correction : Encore plus simple que précédemment, ici $P_e(X) = X$.

Exercice 4. (Utilisation de la caractérisation)
Soit P un polynôme. Montrer que son polynôme d'interpolation aux noeuds $x_i \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, est le reste de la division euclidienne de p par le polynôme $\pi_n(x) = (x - x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$.

Correction : Cet exercice vous démunit en général. Dans ce cas, revenons en à la base : que doit-on démontrer ? On doit démontrer que le reste de la division euclidienne de P par π_n (appelons-le R, on en reparlera plus tard) est LE polynôme d'interpolation de P aux noeuds x_i, $i = 1 \dots n$, c'est à dire, en utilisant la caractérisation du polynôme d'interpolation :

$$\deg(R) \leqslant n, \quad \forall i = 1 \dots n,\ R(x_i) = P(x_i).$$

Ca paraît pas mais on a beaucoup avancé en disant ça, car on sait maintenant comment partir !
Rappelons maintenant comment est défini R :

$$\deg(R) < \deg(\pi_n) = n+1, \quad \text{et il existe un polynôme } Q \text{ tel que } P(X) = Q(X)\pi_n(X) + R(X).$$

Ceci est la définition du reste de la division euclidienne de P par π_n.
On sait donc que $\deg(R) \leqslant n$, parfait, et maintenant, on évalue $P(x_i)$ pour tout i :

$$P(x_i) = Q(x_i)\pi_n(x_i) + R(x_i).$$

Or, la définition de π_n dit que pour tout i, $\pi_n(x_i) = 0$. On a donc bien $P(x_i) = R(x_i)$ pour tout i et la preuve est finie !

Exercice 5. (Vandermonde et interpolation de Lagrange...)
Pour $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on considère la matrice

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\det(V(x_0, \dots, x_n)) = \prod_{(i,j),\ 0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

   Correction : C'est un exercice classique d'algèbre linéaire que vous avez peut être déjà fait, et si ce n'est pas le cas, il est clair que vous le referez. Il y a plusieurs manières de s'y prendre, je vous ne propose une par récurrence :
   Pour $i = 2 \dots n+1$, on remplace la colonne C_i par $C_i - x_0 C_{i-1}$, on obtient alors (le déterminant est inchangé par ces opérations) :

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \dots & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 x_n & \dots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

   Ainsi, en développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

   ce qui donne, par multi-linéarité :

$$V(x_0, \dots, x_n) = (x_1 - x_0) \dots (x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

   On conclut par récurrence.

2. Soit $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}^n$ tel que $P(x_i) = y_i$ si et seulement si $x_i \neq x_j$ pour tout $(i,j), i \neq j$.

   Correction : C'est la preuve qui a été faite en amphi. Je la refais ici.
   Soit donc $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, l'existence et l'unicité d'un tel polynôme est équivalente à l'existence et l'unicité de coefficients $a_0, \dots, a_n$ tels que (en cherchant un

tel polynôme P sous la forme $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ et en écrivant que pour tout $i = 0 \dots n,\ P(x_i) = y_i)$:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{array}\right.$$

c'est à dire l'existence et l'unicité d'un vecteur $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que (en ré-écrivant le système sous forme matricielle

$$V(x_0, \dots, x_n)(a_0, \dots, a_n)^T = (y_0, \dots, y_n)^T.$$

Or, d'après ce qui précède, $V(x_0, \dots, x_n)$ est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts. On a donc existence et unicité d'un tel polynôme si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Exercice 6. (Construction...)
Calculer le polynôme P de degré inférieur ou égal à 4 tel que :

1. $P(-2) = 11,\ P(-1) = 1,\ P(0) = 1,\ P(1) = 5,\ P(2) = 31.$

   Correction : À moins d'avoir envie de se fader le calcul de l'inverse d'une matrice de Vandermonde de taille 5 ou de calculer les 5 polynômes de la base de Lagrange associée à ces noeuds, le mieux est sans doute ici d'utiliser la base de Newton. On obtient en faisant le tableau des différences divisées

   $$P(X) = 11-10(X+2)+5(X+2)(X+1)+(X+2)(X+1)X+\frac{1}{2}(X+2)(X+1)X(X-1).$$

2. $P(-1) = 4,\ P'(-1) = -4,\ P(0) = 0,\ P(1) = 0,\ P'(1) = 0.$

   Correction : Un exercice un peu différent ici puisqu'il ne s'agit pas d'interpolation de Lagrange : on impose aussi des valeurs aux dérivées de P aux noeuds d'interpolation ! Quelle idée ! ! Comme souvent, deux méthodes sont envisageables ici : la méthode "bourrin" et la méthode "malin".
   La méthode bourrin consiste à chercher le polynôme sous forme indéterminée et écrire les 5 équations vérifiées par ses coefficients. On obtiendra comme pour l'interpolation de Lagrange un système linéaire de taille 5 à résoudre. Courage !
   Sinon, on remarque que le polynôme que l'on cherche a le bon goût d'avoir une racine simple : 0 et une racine double : 1 (c'est-à-dire que P ET P' s'annulent en 1). On sait donc qu'on peut le factoriser par $X(X-1)^2$ et on le cherche donc (puisqu'on sait qu'il est de degré inéfrieur ou égal à 4) sous la forme

   $$P(X) = X(X-1)^2(aX+b).$$

   Il ne reste plus qu'à chercher a et b en utilisant les valeurs de P et de P' en -1. On obtient après calcul

   $$\left\{\begin{array}{l} a - b = 1 \\ 3a + 2b = -1 \end{array}\right.$$

ce qui donne $a = \frac{4}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$ et donc finalement, $P(X) = \frac{1}{5}X(X-1)^2(4X-1)$.

Exercice 7. (Base de Lagrange)
Soit $x_0, \dots, x_n$ (n+1) réels distincts deux à deux. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on note

$$L_k(x) = \prod_{j \in \{0,\dots,n\}, j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

le k-ième polynôme de Lagrange.

1. Montrer que L_k est un polynôme de degré n vérifiant $L_k(x_i) = \delta_{ki}$ pour tous $k,\ i \in \{0, \dots, n\}$.
2. En déduire que la famille de polynômes $\{L_k\}_{k \in \{0,\dots,n\}}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction : Cet exercice fait l'objet d'une des preuves les plus importantes du cours. Je vous renvoie donc au cours (ou au poly).

Exercice 8. (examen 2016) (**Exercice optionnel, pour aller plus loin**)
Soient $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n$ et des réels donnés y_i, $0 \leqslant i \leqslant n$. On considère le polynôme d'interpolation satisfaisant

$$P(x_0) = y_0, \quad P(-x_i) = P(x_i) = y_i, \quad pourtous 1 \leqslant i \leqslant n.$$

1. Montrer que le polynôme P est pair.
   Correction : Cette question est un peu moins classique que le reste du TD, c'est pourquoi cet exercice n'a pas été abordé en TD. Plusieurs d'entre vous m'en ont demandé une correction, la voici. Je la détaille à l'extrême pour en faciliter la compréhension. N'hésitez pas à me contacter pour toute question.
   Pour simplifier les notations on va noter, pour $i = 1 \dots n$: $x_{-i} = -x_i$. On a donc alors de l'interpolation avec $2n+1$ noeuds : x_{-i}, x_i pour $i = 1 \dots n$ et 0. Le polynôme que l'on cherche est donc de degré inférieur ou égal à $2n$.
   On rappelle par ailleurs que P n'est pas forcément de degré $2n$. De plus, le fait d'être de degré pair n'entraine pas que P soit pair. En effet, $P(X) = X^2 + X + 1$ n'est par exemple ni pair ni impair. Pour être pair, P doit être une somme de polynômes pair (qui sont eux même des sommes ou produits de polynômes pairs) : $P(-X) = P(X)$.
   On propose de commencer par se faire une idée de ce qui se passe ici en commençant par le cas où $n = 1$. On a alors trois points : $0, x_1$ et $-x_1$.
   On écrit les 3 polynômes de la base de Lagrange associée à $0, -x_1, x_1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(X) = \frac{-1}{x_1^2}(X - x_1)(X + x_1) = \frac{-1}{x_1^2}(X^2 - x_1^2) \\ L_1(X) = \frac{1}{2x_1^2}X(X + x_1) \\ L_{-1}(X) = \frac{1}{2x_1^2}X(X - x_1). \end{array} \right.$$

   On a alors :

$$P(X) = y_0 L_0(X) + y_1 L_1(X) + y_{-1} L_{-1}(X) = y_0 L_0(X) + y_1 \left(L_1(X) + L_{-1}(X)\right)$$

puisque $y_{-1} = y_1$. On constate alors que L_0 est pair et que

$$L_1(X) + L_{-1}(X) = \frac{1}{2x_1^2} X\left(X + x_1 + X - x_1\right) = \frac{X^2}{x_1^2}$$

est pair. P est donc finalement la somme de deux polynômes pairs. Il est donc pair. Voyons maintenant ce qui se passe dans le cas général $n \geqslant 1$. On procède de la même façon : on va calculer L_0, L_k et L_{-k} pour chaque $k = 1 \dots n$.
Étape 1 : calcul de L_0 :

$$L_0(X) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{X - x_i}{-x_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{X - x_{-i}}{-x_{-i}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(X - x_i)(X - x_{-i})}{x_i . x_{-i}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(X - x_i)(X + x_i)}{-x_i^2}.$$

Où on a utilisé le fait que $x_{-i} = -x_i$. On a finalement :

$$L_0(X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(X^2 - x_i^2)}{-x_i^2} \quad \text{qui est donc pair.}$$

Étape 2 : calcul de L_k et L_{-k}, pour $k \in \{1 \dots n\}$ fixé :

$$L_k(X) = \left(\prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{X - x_{-i}}{x_k - x_{-i}}\right) = \left(\prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{X + x_i}{x_k + x_i}\right).$$

On isole alors le terme $i = k$ dans le 2ème produit (qui correspond au terme $i = -k$ du polynôme) et on regroupe les autres termes dans le même produit :

$$L_k(X) = \frac{X + x_k}{2x_k}\left(\prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{(X - x_i)(X + x_i)}{(x_k - x_i)(x_k + x_i)}\right) = \frac{X + x_k}{2x_k} \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{X^2 - x_i^2}{x_k^2 - x_i^2}.$$

Il est alors clair que

$$L_{-k}(X) = \frac{X - x_k}{-2x_k} \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{X^2 - x_i^2}{x_k^2 - x_i^2}.$$

Étape 3 : calcul de P :
Comme dans le cas $n = 1$, on écrit la décomposition de P dans la base de Lagrange :

$$P = y_0 L_0 + \sum_{k=1}^{n} (y_k L_k + y_{-k} L_{-k}) = y_0 L_0 + \sum_{k=1}^{n} y_k (L_k + L_{-k})$$

puisque $y_{-k} = y_k$ par hypothèse. On a vu que L_0 est pair, calculons maintenant $L_k + L_{-k}$ pour tout $k \geqslant 1$ grâce aux calculs de l'étape 2.

$$L_k(X) + L_{-k}(X) = \left(\frac{X - x_k}{-2x_k} + \frac{X + x_k}{2x_k}\right) \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{X^2 - x_i^2}{x_k^2 - x_i^2} = \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{X^2 - x_i^2}{x_k^2 - x_i^2}$$

qui est donc pair. Le polynôme P est donc une somme de polynômes pairs. Il est donc pair.

2. En déduire en un minimum de calculs le polynôme d'interpolation vérifiant

$$P(-1) = 2, \quad P(0) = 4, \quad P(1) = 2.$$

Correction : On peut utiliser le cas que l'on a étudié (avec 3 points) pour se faire une idée dans la question précédente. On obtient donc

$$P(X) = \frac{-y_0}{x_1^2}(X^2 - x_1^2) + \frac{y_1}{x_1^2} X^2.$$

Dans le cas présent $x_1 = 1,\ y_0 = 4,\ y_1 = 2$. On obtient alors

$$P(X) = -4(X^2 - 1) + 2X^2 = -2X^2 + 4.$$

On vérifie bien que P est pair et qu'il convient.

Exercice 9. (examen 1999)

1. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = x\,(x^2 - 1)$ relativement aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

Correction : Les valeurs de la fonction f aux noeuds en question sont les suivantes :

$$f(-1) = f(1) = 0, \quad f(2) = 6.$$

Il y a comme toujours deux façons de faire ici, on va présenter les deux méthodes (elles conduisent bien sûr au même polynôme par unicité).

— On utilise les racines -1 et 1 : en effet on cherche ici un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, on sait qu'il admet 1 et -1 pour racine, donc P est de la forme : $P(X) = \alpha(X-1)(X+1)$, avec α un réel à trouver. Pour le trouver, on utilise la valeur en 2 : $P(2) = 3\alpha = 6$, d'où $\alpha = 2$. On a donc trouvé

$$P(X) = 2(X-1)(X+1).$$

— On peut sinon utiliser une manière plus systématique de calculer ce polynôme (système, base de Lagrange ou base de Newton). En jetant un coup d'oeil à la question suivante, on choisit la base de Newton pour éviter de devoir tout refaire ! Le calcul des différences divisées donne le tableau suivant :

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
-1	0		
1	0	0	
2	6	6	2

On obtient ainsi dans la base de Newton :

$$P(X) = 0 + 0 * (X+1) + 2(X+1)(X-1) = 2(X-1)(X+1).$$

2. Même question en rajoutant le point $x_3 = -2$.

Correction : Toujours deux façons de faire en fonction de celle que l'on a choisie à la question précédente.

— Si on a compris comment on construit les différences divisées, on peut utiliser le polynôme calculé à la question précédente à l'aide des racines -1 et 1. On va ajouter à ce polynôme un polynôme de degré 3 qui s'annule en $-1, 1$ et 2 (pour garder le valeurs du polynôme calculé prcédemment en ces points : on cherche donc β un réel tel que

$$Q(X) = P(X) + \beta(X-1)(X+1)(X-2), \quad Q(-2) = 6 - 12\beta$$

Comme on ajoute la contrainte $Q(-2) = f(-2) = -6$, on a nécessairement $\beta = 1$ et donc

$$Q(X) = 2(X-1)(X+1) + (X-1)(X+1)(X-2).$$

— On peut tout aussi bien (et c'est ,comme on l'a vu en cours, l'interêt principal de la base de Newton) reprendre le tableau des différences divisées précédent et rajouter une ligne avec $x_3 = -2$ et $f(x_3) = -6$. Il suffit alors de calculer les différences divisées qui apparaissent sur la dernière ligne et de rajouter le terme manquant à notre polynôme

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_0, x_1, x_2, f(x_3)]$
-1	0			
1	0	0		
2	6	6	2	
-2	-6	3	1	1

ce qui conduit au polynôme Q écrit dans la base de Newton :

$$Q(X) = 2(X-1)(X+1) + (X-1)(X+1)(X-2).$$

Exercice 10. (partiel 2003)

1. Rappeler l'expression de la base de Newton de $\mathbb{R}_5[X]$ associée aux noeuds 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Correction : Il s'agit du cours, elle est donnée par la famille

$$\{1, X-1, (X-1)(X-2), (X-1)(X-2)(X-3), (X-1)(X-2)(X-3)(X-4),$$
$$(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)\}$$

2. Montrer qu'il s'agit bien d'une base.

Correction : D'une manière générale, pour montrer qu'une famille de d vecteurs d'un espace vectoriel de dimension d il suffit de montrer qu'elle est libre, i.e que toute combinaison linéaire nulle de tous ses éléments est nécessairement la combinaison nulle. Ici, on a 6 éléments et $\mathbb{R}_5[X]$ est de dimension 6, il suffit donc de montrer que cette famille est libre. Supposons trouvés des réels $a_0, \dots, a_5$ tels que

$$R(X) = a_0 + \sum_{k=1}^{5} a_k \prod_{i=1}^{k} (X - i) = 0. \tag{2}$$

On cherche à montrer que tous les a_i sont nuls. Il est très important de comprendre que l'équation (2) est une égalité SUR DES POLYNOMES et donc que cette égalité est vraie pour toutes les valeurs possibles de X. On a en quelque sorte une infinité d'équations ! ! ! On écrit cette égalité pour $X = 1$, ce qui annule tous les termes sauf le premier et donne $a_0 = 0$. De même, en évaluant en $X = 2$, sachant que $a_0 = 0$, on obtient $a_1 = 0$. On fait de même avec $X = 3, 4, 5$ et on obtient $a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Pour a_5 on peut choisir d'évaluer en n'importe quelle valeur de X, par exemple $X = 0$ et on obtient $a_5 = 0$, la famille est donc libre.

3. Donner, dans cette base, l'expression du polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que

$$P(1) = P(6) = 1, \quad P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 0.$$

Correction : Ici on vous demande de calculer ce polynôme dans la base de Newton, pas de question à se poser donc, on fonce sur le tableau de différences divisées... ATTENTION : Utiliser la méthode des racines est malin bien sûr, mais HORS SUJET puisqu'on vous demande d'exprimer le polynôme dans la base de Newton (sauf miracle comme dans l'exercice précédent, les expressions seront toujours différentes)

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$f[1,2,3,4,5,6]$
1	1					
2	0	-1				
3	0	0	$\frac{1}{2}$			
4	0	0	0	$\frac{-1}{6}$		
5	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	
6	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	0

On obtient donc le polynôme suivant :

$$\begin{aligned} P(X) = 1 - (X-1) + \frac{1}{2}(X-1)(X-2) - \frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3) \\ + \frac{1}{24}(X-1)(X-2)(X-3)(X-4). \end{aligned}$$

4. Calculer $P(0)$.

   On calcule avec le polynôme précédent $P(0) = 5$.

Exercice 11. (Partiel 2014)
Étant donnés six réels $x_1,\ a,\ b,\ c,\ d$ et e, on considère le tableau de différences divisées suivant :

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, \ldots, x_{k+2}]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$x_0 = 0$	1			
x_1	-1	1		
$x_2 = -1$	0	b	d	
$x_3 = 2$	a	c	e	$\frac{2}{3}$

1. Calculer $x_1,\ a,\ b,\ c,\ d$ et e.

   Correction : En écrivant les formules des différences divisées on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{-2}{x_1} = 1 \\ \frac{1}{-1-x_1} = b \\ \frac{a}{3} = c \\ \frac{c-b}{4} = e \\ \frac{d-e}{-2} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

   Ce qui finalement donne

$$x_1 = -2, \quad b = 1, \quad d = 0, \quad e = \frac{4}{3}, \quad c = \frac{19}{3}, \quad a = 19.$$

2. Donner, dans la base de Newton le polynôme P_3 qui interpole $(0, 1),\ (x_1, -1),\ (-1, 0)$ et $(2, a)$.

   Correction : Le polynôme associé à ce tableau de différences divisées est donné par :

$$P(X) = 1 + X + dX(X - x_1) + \frac{2}{3}X(X - x_1)(X + 1) = 1 + X + \frac{2}{3}X(X + 2)(X + 1).$$

3. On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f_1 : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cc} 2+9\,x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. , \qquad f_2 : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } x \geqslant -1 \\ -3\,x^2 - x^3 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Pour α et β deux réels, on définit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha\, f_1(x) + \beta\, f_2(x)$.
Montrer que P_3 est le polynôme d'interpolation de f en x_0, x_1, x_2 et x_3 si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$.

Correction : En utilisant la caractérisation équivalente, P_3 est le polynôme d'interpolation de f en x_0, x_1, x_2 et x_3 si et seulement si

$$\deg(P_3) \leqslant 3, \quad \forall i = 0\dots 3,\ P_3(x_i) = f(x_i) = \alpha f_1(x_i) + \beta f_2(x_i).$$

Détaillons $P_3(x_0) = f(x_0)$. On sait que $x_0 = 0$, que $P_3(x_0) = 1$ (par défintion) et

$$f(0) = \alpha f_1(0) + \beta f_2(0) = 2\alpha.$$

On a donc $2\alpha = 1$ soit $\alpha = \frac{1}{2}$.
On obtient avec la valeur en x_1 que $\beta = \frac{1}{4}$ et on vérifie que ces valeurs collent bien avec les égalités en x_2 et x_3.

4. À partir de maintenant, on pose $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$.
Calculer dans la base de Newton le polynôme P_4 qui interpole les points $(0,1)$, $(x_1,-1)$, $(-1,0)$, $(2,a)$ et $(1,6)$.
P_4 est-il le polynôme d'interpolation de f en 0, x_1, -1, 2 et 1 ?

Correction : Cela revient à rajouter $x_5 = 1$ au problème d'interpolation de Lagrange étudié à la question 1. Il faut donc calculer la valeur en 1 de P_4 : $P_4(1) = 6$ et ajouter une ligne au tableau de différence divisées :

x_k	$P[x_k]$	$f[x_k,x_{k+1}]$	$f[x_k,\dots,x_{k+2}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
$x_0 = 0$	1				
$x_1 = -2$	-1	1			
$x_2 = -1$	0	1	0		
$x_3 = 2$	19	$\frac{19}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	
$x_4 = 1$	6	13	$\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	0

Le polynôme d'interpolation P_4 est alors donné par la formule du cours dans la base de Newton :

$$P_4(X) = 1 + X + \frac{2}{3}X(X+2)(X+1).$$

Vous remarquerez peut-être qu'il s'agit finalement de P_3. En effet, si on évalue P_3 en 1 on trouve bien 6. C'est un petit miracle.
Reste à savoir si P_4 est le polynôme de f en 0, x_1, -1, 2 et 1. On a bien $\deg(P_4) = 3 \leqslant 4$. Par ailleurs, on sait déjà (par construction) que P_4 a les mêmes valeurs que f en 0, x_1, -1 et 2. Reste à vérifier donc la valeur en 1. En 1, P_4 vaut 6 par construction, et $f(1) = 11/2 \neq 6$. Donc P_4 n'est pas le polynôme d'interpolation de f aux points 0, x_1, -1, 2 et 1.

Exercice 12. (Convergence uniforme)
On considère $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ et le polynôme d'interpolation P_n tel que

$$\forall i = 0, \ldots n, \quad P_n(x_i) = e^{x_i}.$$

Montrer que la suite de polynômes d'interpolation P_n converge uniformément vers la fonction exponentielle lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire que

$$\sup_{x\in[a,b]} |P_n(x) - e^x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Correction : Pas besoin ici de connaître quoi que ce soit sur la convergence uniforme. On vous demande juste de montrer que

$$\sup_{x\in[a,b]} |P_n(x) - e^x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour cela, bien sûr on va utiliser la seule formule du cours qui permette d'obtenir une estimation sur la différence entre un polynôme d'interpolation et sa fonction (ici la fonction exponentielle). Ici, P_n est en effet LE polynôme d'interpolation de Lagrange associé à $x_0 \ldots, x_n$ de la fonction exponentielle. Le théorème vu en cours assure que

$$\forall x \in [a, b], \ |P_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]}}{(n+1)!} |\pi_{x_0\ldots,x_n}|(x)$$

où $\pi_{x_0\ldots,x_n}(X) = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$.
Or, dans le cas de la fonction exponentielle, on connaît les dérivées successives : c'est elle même. On a donc ici $\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]} = e^b$. On a de plus (c'est toujours le cas même si en général cette estimation est très mauvaise) $\sup_{x\in[a,b]} |\Pi_{x_0\ldots,x_n}|(x) \leqslant (b-a)^{n+1}$.
Finalement,

$$\sup_{x\in[a,b]} |P_n(x) - f(x)| \leqslant e^b \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$