Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III) — **Année universitaire**
Département de mathématiques — **2019-2020**
L2 Maths, UE d'Analyse numérique

Correction - Feuille de TD 2 : Méthodes d'intégration numérique

Exercice 1. (Une méthode sur $[-1,1]$)
Soient $x_1, x_2 \in [-1,1]$, $x_1 < x_2$, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On définit, pour toute fonction f continue sur $[-1,1]$, la méthode d'intégration numérique T de la façon suivante :

$$T(f) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

1. Montrer que T est exacte d'ordre au moins 1 sur $[-1,1]$ si et seulement si $\lambda_1 = \frac{2x_2}{x_2-x_1}$ et $\lambda_2 = \frac{2x_1}{x_1-x_2}$.

   Correction : D'après le cours, T est exacte d'ordre au moins 1 si et seulement si elle est exacte pour les polynômes d'une base de $\mathbb{R}_1[X]$, par exemple les polynômes de la base canonique : 1 et X, *i.e*

   $$T(1) = \int_{-1}^{1} dx = 2 \quad \text{et } T(X) = \int_{-1}^{1} x dx = 0.$$

   Or,

   $$T(1) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et } T(X) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

   ce qui conduit équivaut au système suivant :

   $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 & = & 0 \end{cases}$$

   Ce qui donne finalement $\lambda_1 = \dfrac{2x_2}{x_2 - x_1}$ et $\lambda_2 = \dfrac{2x_1}{x_1 - x_2}$.

2. Pour quelles valeurs de λ_1, λ_2, x_1 et x_2, T est-elle au moins exacte d'ordre 3 ? Quel est alors l'ordre d'exactitude de la méthode ?

   Correction : De même que précédemment, T est au moins d'ordre 3 si et seulement si elle est exacte pour les polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, soit, si et seulement si elle est exacte d'ordre 1 et pour X^2 et X^3, ce qui, d'après la question précédente équivaut à

   $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 & = & 0 \\ T(X^2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 & = & \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \\ T(X^3) = \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 & = & \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 = \dfrac{2x_2}{x_2 - x_1},\ \lambda_2 = \dfrac{2x_1}{x_1 - x_2} & & \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 & = & \frac{2}{3} \\ \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 & = & 0. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{2x_2}{x_2 - x_1},\ \lambda_2 = \dfrac{2x_1}{x_1 - x_2} \\ x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 = \frac{x_2 - x_1}{3} \\ x_1 x_2 (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0. \end{array} \right.$$

Or, on sait par hypothèse que $x_1 < x_2$. De plus, les cas $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ mènent à une contradiction avec $x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 = \frac{x_2 - x_1}{3}$. On a donc $x_2 = -x_1$ et, par un calcul simple, la 2-ème équation donne $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ce qui conduit finalement à $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
La méthode T est donc de degré d'exactitude au moins 3, reste à savoir si $T(X^4) = \int_{-1}^{1} x^4 dx$. Un calcul élémentaire donne :

$$T(X^4) = 2\frac{\sqrt{3}^4}{3^4} = \frac{2}{9} \neq \frac{2}{5} = \int_{-1}^{1} x^4 dx$$

ce qui finit de prouver que la méthode est exacte d'ordre 3.

3. Déduire des questions précédentes une méthode d'intégration d'ordre 3 sur un segment $[a, b]$ quelconque.

   Correction : Pour cette question, on utilise le changement de variable affine vu en cours :
   $$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) dt.$$
   On approche alors $\int_a^b f(x)dx$ par $\frac{b-a}{2} T\left(x \mapsto f(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2})\right)$, c'est-à-dire

   $$T_{a,b}(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(-\frac{(b-a)\sqrt{3}}{6} + \frac{a+b}{2}) + f(\frac{(b-a)\sqrt{3}}{6} + \frac{a+b}{2})\right).$$

   Reste à montrer que cette méthode est exacte pour les polynômes de degré $\leqslant 3$. Soit P un tel polynôme. Il est clair que

   $$Q(X) = \frac{b-a}{2} P\left(\frac{b-a}{2}X + \frac{a+b}{2}\right)$$

   est aussi un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Comme T est une méthode de degré d'exactitude 3, alors

   $$T(Q) = \int_{-1}^{1} Q(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} P\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) dx = \int_a^b P(x)dx.$$

   Or, par construction, $T(Q) = T_{a,b}(P)$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2. (De l'interpolation à l'intégration numérique)
Soit $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soient $x_0,\, x_1 \in [-1,1]$ avec $x_0 \neq x_1$.

1. Interpolation de Lagrange aux noeuds $x_0,\ x_1$:
   a. Donner l'expression du polynôme P_1 d'interpolation de Lagrange de f associé aux noeuds x_0, x_1 dans la base de Lagrange.

   Correction : Comme on l'a vu au chapitre pércédent, le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à ces noeuds dans la base de Lagrange est :

   $$P_1(X) = f(x_0)\frac{X - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{X - x_0}{x_1 - x_0}.$$

   b. Donner la formule d'erreur d'approximation de Lagrange $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - P_1(x)|$ en fonction de $M = \sup\limits_{z\in[-1,1]} |f''(z)|$.

   Correction : Le résultat principal du chapitre suivant donne

   $$\forall x \in [-1,1],\ |f(x) - p_1(x)| \leqslant \frac{M}{2}|x - x_0||x - x_1|.$$

2. On considère la méthode d'intégration numérique sur $[-1,1]$ suivante pour approcher $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$:

   $$J(f) = \int_{-1}^{1} P_1(x)\, dx.$$

   a. Monter qu'il existe $\lambda_0,\, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ tels que $J(f) = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1)$.

   Correction : On se sert de la question 1)a) :

   $$J(f) = \int_{-1}^{1} p_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) dx J(f) = f(x_0)\int_{-1}^{1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}dx + f(x_1)$$

   On a donc $\lambda_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}dx$ et $\lambda_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}dx$

   b. Donner une majoration de l'erreur $|I(f) - J(f)|$ en fonction de M.

   Correction : Par définition de $J(f)$ on a :

   $$|I(f) - J(f)| = \left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} p_1(x)dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} (f(x) - p_1(x))dx \right| \leqslant \int_{-1}^{1} |f(x) - p_1(x)|\, dx$$

   En utilisant la majoration obtenue à la question 1-b) on a alors :

   $$|I(f) - J(f)| \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{M}{2}|x - x_0||x - x_1|dx$$

   Finalement, si on majore $|x - x_i|$ par 2, on obtient

   $$|I(f) - J(f)| \leqslant 4M$$

Exercice 3. (Exam 2016)
Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une application de classe C^1.

1. A l'aide d'un développement de Taylor de la fonction

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $\int_0^1 f(t)\,dt = f(0) + \frac{f'(c)}{2}$.

Correction : La première chose à rappeler est que la définition fait de F LA PRIMITIVE DE f QUI S'ANNULE EN 0. En particulier, F vérifie

$$F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1, \quad \forall x \in [0,1],\ F'(x) = f(x), \quad F(0) = 0. \tag{1}$$

Comme suggéré dans l'énoncé on peut donc écrire de développement de Taylor Lagrange de F en 0 à l'ordre 2 :

$$\forall x \in [0,1],\ \exists \alpha_x \in [0,1],\ F(x) = F(0) + (x-0)F'(0) + \frac{(x-0)^2}{2}F''(\alpha_x)$$

ce qui donne immédiatement d'après

$$\forall x \in [0,1],\ \exists \alpha_x \in [0,1],\ F(x) = f(0)x + \frac{x^2}{2}f'(\alpha_x).$$

En particulier en $x = 1$, en reprenant la définition de $F(1)$, on a donc $c \in [0,1]$ tel que

$$F(1) = \int_0^1 f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(c)$$

(précisément ce qu'il fallait démontrer).

2. On propose d'approcher l'intégrale $I(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$ par une formule du type

$$J(f) = f(0) + \frac{f'(\alpha)}{2}$$

pour $\alpha \in]0,1[$ à déterminer.

a. Montrer que J est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 quelque soit le choix de $\alpha \in]0,1[$.

Correction : Pour montrer que J est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1, il faut (et il suffit) de montrer qu'elle est exacte pour la base canoniqu eue $\mathbb{R}_1[X]$, c'est-à-dire

$$J(1) = 1 \text{ et } J(X) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Or, par définition de J :
— $J(1) = 1 + 0 = 1$

— $J(X) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

b. Déterminer α pour que l'approximation $J(f)$ soit exacte pour les polynômes de degré au plus égal à deux.

Correction : Pour que J soit de plus exacte pour les polynômes de degré 2, d'après ce qui précède il suffit d'avoir $J(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.
Or,

$$J(X^2) = 0 + \frac{2\alpha}{2} = \alpha.$$

La condition nécessaire et suffisante est donc que $\alpha = \frac{1}{3}$.

c. Pour le choix de α de la question 2-b), quel est l'ordre d'exactitude de la méthode ?

Correction : On a vu à la question précédente que le degré d'exactitude est au moins 2, il faut donc tester pour 3, 4 etc jusqu'à trouver quel est le plus au degré pour lequel J est exacte. On va vérifier si J est exacte à l'ordre 3 :

$$J(X^3) = 0^3 + \frac{3 \times \alpha^2}{2} = \frac{3 \times \frac{1}{3^2}}{2} = \frac{1}{6}$$

et $\displaystyle\int_0^1 t^3\,dt = \frac{1}{4}$. Ainsi, $J(X^3) \neq \displaystyle\int_0^1 t^3\,dt$ donc J est de degré d'exactitude 2.

3. On fixe pour la suite α comme à la question 2-b).
On suppose que $f \in C^3([0,1])$. A l'aide d'un développement de Taylor de $F(x)$, montrer qu'il existe $d \in]0,1[$ tel que

$$I(f) = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(0) + \frac{1}{24}f^{(3)}(d).$$

A l'aide d'un développement de Taylor de $f'(\alpha)$, montrer alors que

$$|I(f) - J(f)| \leqslant \frac{5}{72} \sup_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)|.$$

Correction : La fonction f est maintenant de classe $\mathcal{C}^3$, ce qui fait de F une fonction de classe $\mathcal{C}^4$. On peut donc effectuer un développement de Taylor Lagrange à l'ordre 4 en 0 et on obtient :

$$\forall x \in [0,1],\ \exists \alpha_x \in [0,1],\ F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{2}F''(0) + \frac{x^3}{6}F'''(0) + \frac{x^4}{24}F^{(4)}(\alpha_x).$$

En particulier, en $x = 1$ et en utilisant les propriétés (1) de F, on obtient qu'il existe $d = \alpha_1 \in [0,1]$ tel que

$$I(f) = F(1) = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(0) + \frac{1}{24}f'''(d)$$

ce qu'il fallait démontrer dans un premier temps.
On veut maintenant évaluer $I(f) - J(f)$. Comme $J(f)$ fait intervenir $f'(\alpha)$, il

paraît raisonnable de faire un développement de Taylor Lagrange de $f'(\alpha)$ en 0 à l'ordre maximal (i.e 2 puisque f' est de classe $\mathcal{C}^2$) :

$$f'(\alpha) = f'(0) + \alpha f''(0) + \frac{\alpha^2}{2} f'''(e) \text{ pour un certain } \xi \in [0,1].$$

Or, on sait que $\alpha = \frac{1}{3}$, ce qui donne

$$f'(\alpha) = f'(0) + \alpha f''(0) + \alpha^2 \frac{f^{(3)}(\xi)}{2}$$

c'est-à -dire

$$J(f) = f(0) + \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{6} f''(0) + \frac{1}{36} f^{(3)}(\xi).$$

Enfin, en réunissant tout cela :

$$I(f) - J(f) = \frac{1}{24} f^{(3)}(d) - \frac{1}{36} f^{(3)}(\xi)$$

et donc,

$$|I(f) - J(f)| \leqslant \frac{|3f^{(3)}(d) - 2f^{(3)}(\xi)|}{72} \leqslant \frac{3}{72}|f^{(3)}(d)| + \frac{2}{72}|f^{(3)}(\xi)| \leqslant \frac{5}{72} \sup_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)|$$

4. Soient $h > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $[a, a+h] \subset [0,1]$.
   a. On note f_h la fonction définie par $f_h(t) = f(a + th)$, montrer que :

$$\int_a^{a+h} f(t)\,dt = h \int_0^1 f_h(t)\,dt.$$

Correction : En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{x-a}{h}$, c'est-à-dire $x = a + ht$, $dx = h\,dt$, on a :

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \int_0^1 h\,f(a+ht)\,dt = h \int_0^1 f_h(t)\,dt.$$

   b. À partir des questions précédentes, proposer une formule d'approximation $J_{a,h}(f)$ pour

$$I_{a,h}(f) = \int_a^{a+h} f(t)\,dt$$

qui soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à deux.

Correction : On s'inspire de ce qui a été fait en cours pour les changements d'intervalle d'intégration : on dispose dorénavant d'une méthode exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Ainsi, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors

$$\int_0^1 P(x)dx = J(P) = P(0) + \frac{1}{2}P'(\alpha) \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{3}.$$

Soit maintenant $Q \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\int_a^{a+h} Q(x)dx = h\int_0^1 Q_h(t)dt \qquad \text{avec } Q_h(t) = Q(a+ht).$$

Comme $Q_h \in \mathbb{R}_2[X]$, alors ; la question d-1) donne

$$h\int_0^1 Q_h(t)dt = h\Big(Q_h(0) + \frac{1}{2}Q_h'(\alpha)\Big) = h\Big(Q(a) + \frac{1}{2}h\ Q'(a+\alpha h)\Big).$$

La méthode demandée sur $[a, a+h]$ est donc

$$J_{a,h}(f) = hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a+\alpha h) \qquad \text{avec } \alpha = \frac{1}{3}.$$

c. Montrer que pour tout $f \in C^3([0,1])$, on a $|I_{a,h}(f) - J_{a,h}(f)| \leqslant \dfrac{5\,h^4}{72} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)|$.

Correction : On va utiliser le fait que

$$I_{a,h}(f) - J_h(f) = h\int_0^1 f_h(x)dx - hJ(f_h)$$

d'après ce qui précède et l'estimation de $|I(f_h) - J(f_h)|$ trouvée à la question 3. Ainsi :

$$|I(f_h) - J(f_h)| \leqslant \frac{5}{72}\sup_{x\in[0,1]} |f_h^{(3)}(x)|.$$

Or, $\forall x \in [0,1],\ f_h^{(3)}(x) = h^3 f^{(3)}(a+hx)$, d'où $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_h^{(3)}(x)| = h^3 \sup\limits_{x\in[a,a+h]} |f^{(3)}(x)|$ ce qui fournit le résultat demandé.

Exercice 4. (Exam 2019-1)

1. Déterminer dans la base de Newton le polynôme d'interpolation de Lagrange P_2 associé aux noeuds $x_0 = 1,\ x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 2$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.
Correction : En faisant un tableau de différences divisées on obtient

$$P(X) = 1 - \frac{2}{3}(X-1) + \frac{1}{3}(X-1)(X-\frac{3}{2}).$$

2. En utilisant la formule de l'erreur d'interpolation, montrer que

$$\forall x \in [1,2],\ |f(x) - P_2(x)| \leqslant (x-1)(2-x)|x - \frac{3}{2}|.$$

Correction : Il suffit ici d'appliquer le théorème du cours qui donne

$$\forall x \in [1,2],\ \exists \alpha_x \in]1,2[\ f(x) - P_2(x) = \frac{f^{(3)}(\alpha_x)}{6}(x-1)(x-\frac{3}{2})(x-2)$$

et de noter que, pour la fonction f donnée, pour tout $t \in [1,2]$, $|f^{(3)}(t)| = \frac{6}{t^4} \leqslant 6$ car $t \geqslant 1$.

Soit $g : [1,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche à approcher l'intégrale $I(g) = \int_1^2 g(x)dx$ par la formule d'intégration numérique $J_2(g)$ suivante :

$$J_2(g) = \lambda_0 g(1) + \lambda_1 g(\frac{3}{2}) + \lambda_2 g(2).$$

3. Donner le système linéaire vérifié par $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ pour que la méthode J_2 soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
   Correction : En écrivant que J est exacte pour les 3 polynômes de la base canonique, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_0 + \frac{3}{2}\lambda_1 + 2\lambda_2 = \frac{3}{2}, \\ \lambda_0 + \frac{9}{4}\lambda_1 + 4\lambda_2 = \frac{7}{3}. \end{cases}$$

4. En déduire les valeurs de λ_0, λ_1 et λ_2.
   Correction : Les valeurs correspondantes sont :

$$\lambda_0 = \lambda_2 = \frac{1}{6},\ \lambda_1 = \frac{2}{3}$$

   C'est normal, il s'agit de la méthode de Simpson.
5. Quel est le degré d'exactitude de la méthode ?
   Correction : Cette méthode est de degré d'exactitude 3 (vu en cours)
6. Déduire de cette étude une valeur approchée de $\ln(2)$. Que pourrait-on faire pour avoir une approximation aussi fine que l'on souhaite ?
   Correction : On a $\ln 2 = I(f) \approx J_2(f)$, c'est à dire :

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{6}f(1) + \frac{2}{3}f(3/2) + \frac{1}{6}f(2) = \frac{25}{36}.$$

   Pour obtenir une meilleure approximation, il faudrait écrire la méthode composite associée à J_2, c'est à dire définir une subdivision $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$ uniforme de pas h de $[1,2]$ puis écrire la relation de Chasles : $I(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx$ puis approcher chaque $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx$ par $\frac{h}{6}f(a_k) + \frac{2h}{3}f(a_k + \frac{h}{2}) + \frac{1}{6}f(a_{k+1})$.

Exercice 5. (Exam 2019-2)
On définit une méthode d'intégration numérique d'une fonction continue $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ par

$$J(f) = \lambda_0 f(-\alpha) + \lambda_1 f(0) + \lambda_2 f(\alpha) \text{ où } \alpha \in]0,1].$$

On pose $I(f) = \int_{-1}^1 f(t)dt$.

1. Déterminer $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2$ en fonction de α pour que la méthode J soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
   Correction : En écrivant que J est exacte sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on obtient
$$\lambda_0 = \lambda_2 = \frac{1}{3\alpha^2}, \quad \lambda_1 = \frac{6\alpha^2 - 2}{3\alpha^2}.$$
2. Écrire la méthode obtenue pour $\alpha = 1$. A quelle méthode du cours correspond-elle ?
   Correction : Pour $\alpha = 1$ on obtient bien sûr la méthode de Simpson vue en cours :
$$J(f) = 2 * \left(\frac{1}{6}f(-1) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{6}f(1)\right) = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1).$$
3. On suppose dans cette question que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^3$. On considère le polynôme d'interpolation de Lagrange P_α de f associé aux noeuds $-\alpha,\ 0,\ \alpha$. Donner une estimation de $|f(x) - P_\alpha(x)|$ pour tout $x \in [-1, 1]$. En déduire une estimation de $|J(f) - I(f)|$.
   Correction : Le théorème du cours donne directement :
$$\forall x \in [-1, 1],\ |f(x) - P_\alpha(x)| \leqslant \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{6}|x^2 - \alpha^2||x|$$
4. Déterminer $\alpha \in]0, 1]$ pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré supérieur à 2. Quel degré d'exactitude obtient-on pour cette méthode ?
   Correction : La méthode est exacte pour X^3 et X^5 automatiquement (par parité), et elle est exacte pour X^4 si et seulement si $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Elle est alors de degré d'exactitude 5 (on vérifie qu'elle n'est pas exacte pour X^6).
5. On veut écrire une méthode d'intégration numérique de même degré d'exactitude pour calculer l'intégrale d'une fonction sur $[0, 1]$. Déduire d'un changement de variable bien choisi les valeurs de a et $b \in [0, 1]$ tels que $\tilde{J}(f) = \frac{1}{2}\left(\lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(b)\right)$ soit de même degré d'exactitude.
   Correction : Le changement de variable $x = \frac{s+1}{2}$ donne l'égalité
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{\text{à}}^{1} f(\frac{s+1}{2})ds.$$
   On a donc sur $[0, 1]$ la méthode d'intégration numérique issue de J_α suivante :
$$J_{[0,1]}(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{9}f\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) + \frac{8}{9}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{9}f\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right).$$
6. En utilisant le degré d'exactitude de la méthode, quel serait l'ordre de grandeur de l'erreur de la méthode composite associée pour une discrétisation de $[0, 1]$ de pas h ?
   Correction : La méthode est de degré d'exactitude 6 d'après ce qui précède. On a donc, d'après le résultat du cours, une meilleure erreur d'intégration numérique pour la méthode composite associée, de l'ordre de h^6.