Université Toulouse 3 Paul Sabatier 2018-2019
L2 Parcours Spécial

TP 1 - Calcul Scientifique

In [1]:

```
%pylab inline
# %pylab inline est un équivalent de l'importation* de numpy et de matplotlib.py
plot
#%matplotlib inline
#from matplotlib.pyplot import *
#from numpy import *
#from scipy import *
```

```
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

Exercice 1 - Interpolation

1) On considère les abscisses $x = [-2, 0, 1, 2]$ et $y = [4, 0, 0, 4]$. Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation aux points x, y (justifiez votre réponse) ?

- $p_1(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{8}{3}x$
- $p_2(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}$
- $p_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}x$

Correction : On remarque que p_1 est de degré trop grand : le polynome recherché est de degré inférieur ou égal à 3 (puisqu'il y a 4 points). Le polynome p_2 ne vaut pas 0 en 0. On vérifie que le polynome p3 convient : il a bien un degré inférieur ou égal à 3 et $p_3(-2) = 4, p_3(0) = 0, p_3(1) = 0, p_3(2) = 4$.

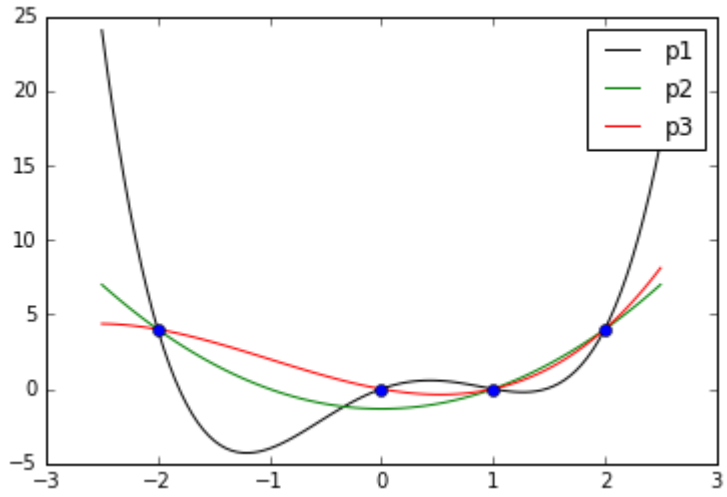
2) Représentez sur une même figure les points d'interpolation, ainsi que les polynômes p_1 , p_2 et p_3 respectivement en noir, vert et rouge, sur l'intervalle $[-2.5, 2.5]$.

In [2]:

```
Xint=array([-2,0,1,2])
Yint=array([4,0,0,4])
x=linspace(-2.5,2.5,100)
p1=x**4-2.0/3*x**3-3*x**2+8.0/3*x
p2=4.0/3*x**2-4.0/3
p3=1.0/3*x**3+x**2-4.0/3*x
plot(x,p1,'black',x,p2,'g',x,p3,'r')
legend(['p1','p2','p3'])
plot(Xint,Yint,'o')
#on voit bien que p3 est le seul polynome dont le graphe passe par les 3 points
```

Out[2]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x10daa8910>]
```



Exercice 2 - Calcul de polynômes d'interpolation

1) Calculez les polynômes d'interpolation aux points suivants :

a) $x = [-1, 2, 3]$ et $y = [4, 4, 8]$ **Correction** : Méthode 1 : par une résolution de système : on cherche P de degré inférieur ou égal à 2 (car il y a 3 points), on cherche donc P sous la forme $P(X) = a + bX + cX^2$. En écrivant $P(-1) = 4, P(2) = 4$ et $P(3) = 4$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a - b + c = 4 \\ a + 2b + 4c = 4 \\ a + 3b + 9c = 8 \end{cases}$$

ce qui nous donne $P(X) = 2 - X + X^2$. Méthode 2 : par la base de Lagrange : On sait d'après le cours que le polynome P s'écrit simplement dans la base de Lagrange $P(X) = y_0 L_0(X) + y_1 L_1(X) + y_2 L_2(X)$ et l'on calcule les polynômes $L_k(x) = \prod_{j \in \{0,\dots,n\}, j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$. On obtient :

$$\begin{cases} L_0(X) = \frac{1}{12}(X-2)(X-3) \\ L_1(X) = \frac{1}{12}(X+1)(X-3) \\ L_2(X) = \frac{1}{4}(X+1)(X-2) \end{cases}$$

Alors $P(X) = \frac{1}{3}(X-2)(X-3) + \frac{1}{3}(X+1)(X-3) + 2(X+1)(X-2)$. Il n'est pas utile de le développer mais si on le faisait, on retrouverait bien sur celui de la méthode 1 (puisqu'il est unique d'après le cours).

d) $x = [-1, 0, 1]$ et $y = [1, 0, 1]$

Correction : Ici c'est plus simple puisqu'on voit à l'oeil que $Q(X) = X^2$ convient.

e) $x = [-3, -1, 2, 10]$ et $y = [-3, -1, 2, 10]$

Correction : Ici c'est encore plus simple puisqu'on constate que $R(X) = X$ convient.

2) Représentez graphiquement les polynômes des points a) et b), accompagnés des points d'interpolation correspondants.

In [3]:

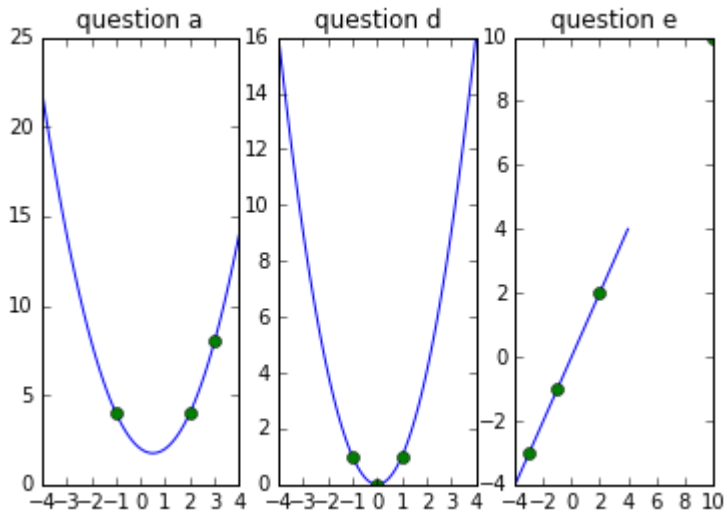
```
Xa=array([-1,2,3])
Ya=array([4,4,8])
Xd=array([-1,0,1])
Yd=array([1,0,1])
Xe=array([-3,-1,2,10])
Ye=Xe

x=linspace(-4,4,100)
P=2-x+x**2
Q=x**2
R=x

subplot(1,3,1)
plot(x,P,Xa,Ya,'o')
title('question a')
subplot(1,3,2)
plot(x,Q,Xd,Yd,'o')
title('question d')
subplot(1,3,3)
plot(x,R,Xe,Ye,'o')
title('question e')
```

Out[3]:

```
<matplotlib.text.Text at 0x10e065910>
```



Exercice 3 - Base de Lagrange

Soit $x_0, \dots, x_n$ (n+1) réels distincts deux à deux. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on note

$$L_k(x) = \prod_{j \in \{0,\dots,n\}, j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

le k-ième polynôme de Lagrange.

1) Montrez que L_k est un polynôme de degré n vérifiant $L_k(x_i) = \bar{}_{ki}$ pour tout $k,\ i \in \{0, \dots, n\}$.
Correction : voir cours

2) En déduire que la famille de polynôme $\{L_k\}_{k \in \{0,\dots,n\}}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$. **Correction** : voir cours

3) Écrire une fonction `PolLagrange(Xint,x,k)` qui calcule les valeurs prises par le k-ième polynôme de la base de Lagrange associé aux abscisses $X_{int} = (x_0, \dots, x_n)$, en un point x.

4) Ecrire une fonction `ApproxLagrange(Xint,f,x)` qui renvoie la valeur en x du polynôme d'interpolation de Lagrange de f associé aux noeuds $X_{int} = (x_0, \dots, x_n)$.

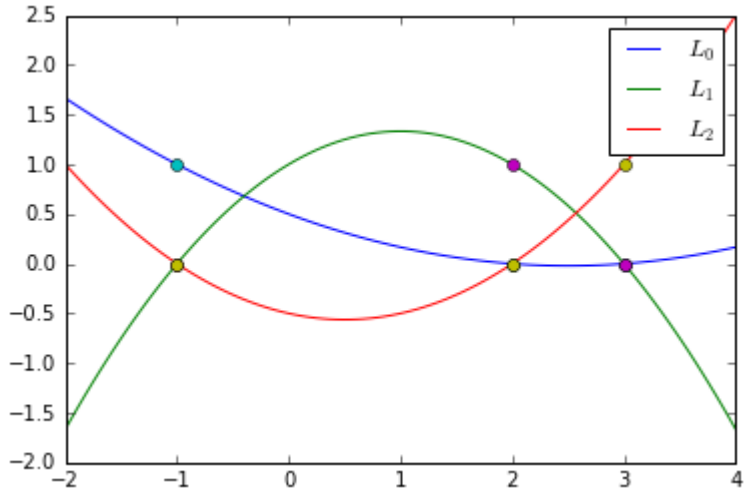
In [4]:

```
def PolLagrange(Xint, x, k):
    P=ones(shape(x)) #on peut aussi mettre P=1
    for i in range(len(Xint)):
        if i!=k:
            P=P*(x-Xint[i])/(Xint[k]-Xint[i])
    return P

x=linspace(-2,4,100)
Xint=array([-1, 2, 3])
l0=PolLagrange(Xint,x,0)
l1=PolLagrange(Xint,x,1)
l2=PolLagrange(Xint,x,2)
Y0=array([1,0,0])
Y1=array([0,1,0])
Y2=array([0,0,1])
plot(x,l0,x,l1,x,l2)
legend(['$L_0$','$L_1$','$L_2$'])
plot(Xint,Y0,'o',Xint,Y1,'o',Xint,Y2,'o')
```

Out[4]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x10e33d5d0>,
 <matplotlib.lines.Line2D at 0x10e353d10>,
 <matplotlib.lines.Line2D at 0x10e35f290>]
```



In [5]:

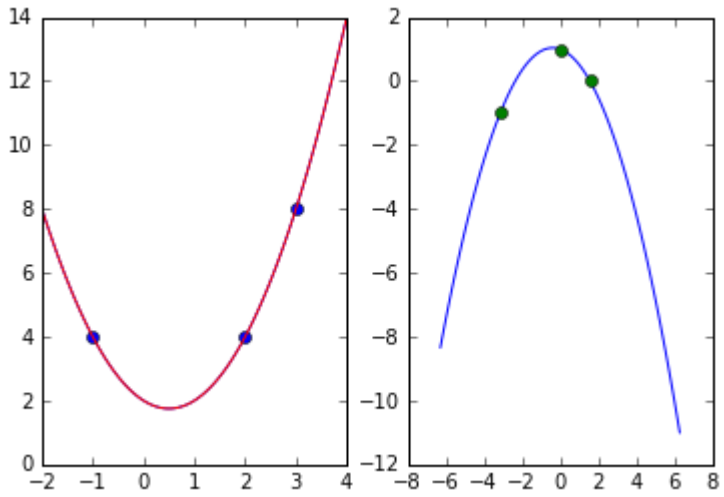
```
def ApproxLagrange(Xint,Yint,x):
    P=0
    for k in range(0,len(Xint)):
        P=P+Yint[k]*PolLagrange(Xint,x,k)
    return P

Xint=array([-1,2,3])
Yint=array([4,4,8])
x=linspace(-2,4,100)
y=ApproxLagrange(Xint,Yint,x)
z=2-x+x**2
subplot(1,2,1)
plot(x,y,'b',Xint,Yint,'o',x,z,'r') #on voit bien que les deux polynomes sont le
s memes !

#Si on veut passer une fonction en argument pour calculer le polynome de Lagrang
e d'une fonction :
def ApproxLagrangef(Xint,f,x):
    P=0
    for k in range(0,len(Xint)):
        P=P+f(Xint[k])*PolLagrange(Xint,x,k)
    return P
Xint=array([-pi,0,pi/2])
x=linspace(-2*pi, 2*pi, 100)
y=ApproxLagrangef(Xint,cos,x)
subplot(1,2,2)
plot(x,y,Xint,cos(Xint),'o')
```

Out[5]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x10e580750>,
 <matplotlib.lines.Line2D at 0x10e95d690>]
```



Exercice 4 - Méthode de Simpson pour le calcul approché d'intégrales

Soit une fonction continue $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$. On cherche à approcher l'intégrale $I(g) = \int_1^2 g(x)dx$ par la formule d'intégration numérique J_2 suivante:

$$J_2(g) = \alpha_0 g(1) + \alpha_1 g\left(\frac{3}{2}\right) + \alpha_2 g(2)$$

où les α_i sont des réels.

1) Ecrire le système que doit vérifier $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ pour que la méthode soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Correction : La méthode est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement si elle est exacte pour les polynômes $1, X$ et X^2, soit :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_0 + \frac{3}{2}\alpha_1 + 2\alpha_2 = \frac{3}{2} \\ \alpha_0 + \frac{9}{4}\alpha_1 + 4\alpha_2 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

2) En déduire les valeurs de α_0, α_1 et α_2.

Correction : On obtient après résolution $\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{6}, \alpha_1 = \frac{2}{3}$.

3) Quel est le degré d'exactitude de la méthode ?

Correction : On sait déjà qu'elle est au moins de degré d'exactitude 2 puisqu'elle a été construite poru être exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Mais elle peut etre de degré d'exactitude plus grand, il faut tester sur $P = X^3$, puis $P = X^4$ etc jusqu'à trouver un degré pour lequel $J_2(P) \neq \int_1^2 P(x)dx$. Ici, on calcule $J_2(X^3) = \frac{15}{4} = \int_1^2 x^3 dx$. Par contre on trouve par le calcul que $J_2(X^4) \neq \int_1^2 x^4 dx$.

4) Déduire de cette étude une valeur approchée de $\ln(2)$. Que peut-on faire pour avoir une approximation aussi fine de que l'on souhaite ?

Correction : On utilise le fait que $\ln(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}$. Maintenant,
$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx J_2(\frac{1}{x}) = \frac{1}{6} * 1 + \frac{2}{3} * \frac{2}{3} + \frac{1}{6} * \frac{1}{2} = \frac{25}{36}$.

Exercice 5 - Méthode des rectangles en des trapèzes composite

1) Écrire une fonction `RectComp(a,b,f,h)`, qui retourne une approximation numérique de l'intégrale de la fonction `f` sur `[a,b]`, en utilisant la méthode d'intégration de rectangle à gauche composite sur une subdivision uniforme de pas `h`.

2) De même qu'à la question 1), écrire une fonction `TrapComp(a,b,f,N)`, qui retourne une approximation numérique de l'intégrale de la fonction `f` sur `[a,b]`, en utilisant la méthode d'intégration de trapèze à gauche composite sur une subdivision uniforme de pas `h`.

Correction : On rappelle la formule vue en cours pour les méthode des rectangles à gauche et des trapèzes composites : si $a_0 = a, \dots, a_n = b$ désigne une subdivision uniforme de pas h de $[a, b]$ (c'est-à-dire que $a_i = a + i * h$), alors

$$J^{rg}_{comp}(f) = h \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k), \qquad J^{trap}_{comp}(f) = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(a_k) + f(a_{k+1})) .$$

3) Utiliser ces fonctions pour calculer une approximation de l'intégrale de la fonction $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, 2]$ par les méthodes composites des rectangles et trapèzes, avec `h` = 0.1, puis `h` = 0.01 et enfin `h` = 0.001. Quelle erreur obtient-on dans chaque cas ? Cela est-il en accord avec les résultats théorique vus en cours ?

In [6]:

```
def RectComp(a,b,f,h):
    return(h*sum(f(arange(a,b,h))))

def TrapComp(a,b,f,h):
    return(h/2*sum(f(arange(a,b,h)))+h/2*sum(f(arange(a+h,b+h,h))))

#affichage des erreurs pour h=0.1, h=01, h=0.001
print(RectComp(0,2,cos,0.1)-sin(2))
print(RectComp(0,2,cos,0.01)-sin(2))
print(RectComp(0,2,cos,0.001)-sin(2))
#Resultats théoriques pour la méthode des rectangles composite : erreur de l'ord
re de h

print(TrapComp(0,2,cos,0.1)-sin(2))
print(TrapComp(0,2,cos,0.01)-sin(2))
print(TrapComp(0,2,cos,0.001)-sin(2))
#Resultats théoriques pour la méthode des rectangles composite : erreur de l'ord
re de h^2
```

```
0.0700494676503
0.00707315669155
0.000707997643487
-0.000757874177074
-7.57749118596e-06
-7.57747867786e-08
```

Exercice 6 - Une nouvelle méthode d'intégration numérique

Soient $x_1, x_2 \in [-1,1]$, $x_1 < x_2$, et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

On définit, pour f une fonction continue sur $[-1,1]$, la méthode d'intégration numérique T de la façon suivante :

$$T(f) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

a) Montrer que T est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 sur $[-1,1]$ si et seulement si $\alpha_1 = \frac{2x_2}{x_2 - x_1}$ et $\alpha_2 = \frac{2x_1}{x_1 - x_2}$.

Correction : Par définition, la méthode T est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 si et seulement si elle est exacte pour $P(X) = 1$ et $P(X) = X$, c'est-à-dire:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 &= \int_{-1}^{1} dx = 2 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 &= \int_{-1}^{1} x dx = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne finalement $\alpha_1 = \frac{2x_2}{x_2 - x_1}$ et $\alpha_2 = \frac{2x_1}{x_1 - x_2}$.

b) Pour quelles valeurs de α_1, α_2, x_1 et x_2, T est-elle exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 ? Quel est alors le degré d'exactitude de la méthode ?

Correction : Pour que T soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3, il faut et il suffit qu'elle soit exacte

- (a) pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1
- (b) pour $P(X) = X^2$
- (c) pour $P(X) = X^3$.

Or, on a vu que (a) est vérifié si et seulement si $\alpha_1 = \frac{2x_2}{x_2 - x_1}$ et $\alpha_2 = \frac{2x_1}{x_1 - x_2}$. De plus,

$$(b) \Leftrightarrow \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_1 x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Enfin, (c) est vrai si et seulement si $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = 0$ c'est-à-dire $x_1^2 = x_2^2$ (car par hypothèse $x_1 \neq x_2$. D'après (b), x_1 et x_2 sont de signe différents, ce qui donne au final $x_1^2 = \frac{1}{3}$: T est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3 si et seulement si

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1.$$

c) Déduire des questions précédentes une méthode d'intégration de degré d'exactitude 3 sur un segment $[a,b]$ quelconque.

Correction : On utilise le changement de variable expliqué en cours pour passer de notre méthode sur $[-1,1]$ à une méthode sur $[a,b]$ quelconque. On obtient

$$J(f) = \frac{(b-a)}{2}(f(t_1) + f(t_2))$$

avec $t_1 = -\frac{b-a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{b+a}{2}$ et $t_2 = \frac{b-a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{b+a}{2}$

c) Programmer la méthode d'intégration obtenue, puis la méthode d'intégration composite correspondante. Vérifiez l'ordre de la méthode en testant sur la fonction $\cos$ sur $[0,2]$.

In [7]:

```
def MethIntExo6(a,b,f):
    #On se contente de recopier la formule précédante
    t1 = -((b-a)/2)*(sqrt(3)/3) + ((b+a)/2)
    t2 = ((b-a)/2)*(sqrt(3)/3) + ((b+a)/2)
    Jf = ((b-a)/2)*(f(t1) + f(t2))
    return Jf

print("Méthode de l'exercice 6 pour cos entre 0 et 2")
print(MethIntExo6(0,2,cos),sin(2))

#La méthode composite peut s'obtenir avec en s'inspirant de l'exercice précédant
:

def MethCompExo6(a,b,f,h):
    A=arange(a,b+h,h) #subdivision uniforme de [a,b] de pas h : a0...an
    n=len(A)-1
    J=0
    for k in range(0,n):
        J=J+MethIntExo6(A[k],A[k+1],f)
    return J

print("Méthode  composite de l'exercice 6 pour cos entre 0 et 2, pas 0.1")
print(MethCompExo6(0,2,cos,0.1),sin(2))
print("Méthode  composite de l'exercice 6 pour cos entre 0 et 2, pas 0.01")
print(MethCompExo6(0,2,cos,0.01),sin(2))
```

```
Méthode de l'exercice 6 pour cos entre 0 et 2
(0.90545138523558433, 0.90929742682568171)
Méthode  composite de l'exercice 6 pour cos entre 0 et 2, pas 0.1
(0.90929740577044627, 0.90929742682568171)
Méthode  composite de l'exercice 6 pour cos entre 0 et 2, pas 0.01
(0.90929742682357673, 0.90929742682568171)
```

In [ ]: