Chapitre 2

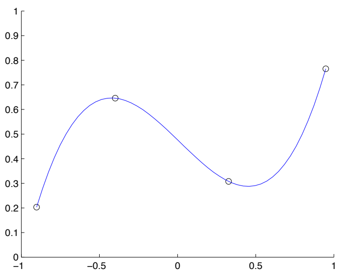
Interpolation polynomiale

2.1 Motivations

En analyse numérique, une fonction f **inconnue explicitement** est souvent
– connue seulement en certains points x_0, x_1, ..., x_d ;
– ou évaluable uniquement au moyen de l'appel à un code coûteux.

Mais dans de nombreux cas, on a besoin d'effectuer des opérations (dérivation, intégration, ...) sur la fonction f.

On cherche donc à reconstruire f par une autre fonction f_r simple et facile à évaluer à partir des données discrètes de f. On espère que le modèle f_r ne sera pas trop éloigné de la fonction f aux autres points.



On s'intéresse dans ce cours à la reconstruction de f par des polynômes.

Pourquoi les polynômes ?

1. Théorème d'approximation de Weierstrass : pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme p tel que
$$\forall x \in [a, b], |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$
Plus ε est petit, plus le degré du polynôme est grand.
2. La simplicité de l'évaluation d'un polynôme par le schéma de Hörner :
$$\sum_{j=0}^{n} c_j x^j = \Big(...\Big((c_n x + c_{n-1})x + c_{n-2}\Big)x + ...c_1\Big)x + c_0$$

Plus précisément, étant donnés $d+1$ points d'abscisses distinctes $M_i = (a_i, f_i), i = 0, 1, ..., d$ dans le plan, le problème de l'**interpolation polynomiale** consiste à trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à m dont le graphe passe par les $d+1$ points M_i, c'est-à-dire
$$\text{trouver } p \in \mathcal{P}_m \text{ tel que } p(a_i) = f_i, \quad \forall i = 0, 1, ..., d. \tag{2.1}$$

2.2 Existence de l'interpolant et sa forme de Lagrange

2.2.1 Introduction

2 points : $d = 1$

Naturellement, le problème de trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 dont le graphe passe par 2 points $M_0 = (a_0, f_0)$ et $M_1 = (a_1, f_1)$ d'abscisses différentes $a_0 \neq a_1$ est très facile : il suffit de choisir l'unique polynôme dont le graphe est la droite (M_0M_1).

En effet, on pose $p(x) = \alpha x + \beta$ et on cherche α et β tels que $p(a_0) = f_0$ et $p(a_1) = f_1$. On obtient simplement

$$\alpha = \frac{f_1 - f_0}{a_1 - a_0}, \quad \beta = f_0 - \alpha a_0, \quad p(x) = \frac{f_1 - f_0}{a_1 - a_0}(x - a_0) + f_0.$$

3 points : $d = 2$

Lorsqu'on dispose de 3 points d'abscisses deux à deux distinctes et que l'on cherche un polynôme de $\mathcal{P}_2$, le problème est à peine plus difficile. Le graphe du polynôme cherché est généralement une parabole (correspondant à un polynôme de degré 2). Mais dans le cas où les 3 points sont alignés, le graphe du polynôme cherché est une droite comme dans le cas $d = 1$.

Cas général

Dans le cas général, le problème (2.1) peut n'avoir aucune solution ou bien en avoir une infinité.

Exercice 1
1. *Montrer qu'il existe une infinité de polynômes passant par les points $M_0 = (0, 0)$ et $M_1 = (1, 1)$.*
2. *Trouver 4 réels f_0, f_1, f_2, f_3, tels qu'aucun graphe de polynôme de $\mathcal{P}_2$ ne passe par les 4 points $M_0 = (-1, f_0)$, $M_1 = (0, f_1)$, $M_2 = (1, f_2)$ et $M_3 = (2, f_3)$.*

Il paraît assez clair que pour que le problème (2.1) ait une unique solution il faut établir une relation entre m et d. Pour déterminer $p \in \mathcal{P}_m$, on doit trouver tous ses coefficients et ils sont au nombre de $m+1$. On dispose pour ce faire des $d+1$ relations $p(a_i) = f_i$, $i = 0, 1, ..., d$. Il est donc assez évident que pour espérer une solution unique au problème (2.1), on doit supposer que $m = d$.

2.2.2 Existence du polynôme d'interpolation

Théorème 3 *Soit $A = \{a_0, a_1, ..., a_d\}$ un ensemble de $d + 1$ réels distincts. Quels que soient les $d + 1$ réels f_0, f_1, ..., f_d, il existe un et un seul polynôme $p \in \mathcal{P}_d$ tel que $p(a_i) = f_i$, $\forall i = 0, 1, ..., d$.*

Preuve : On décompose p dans la base canonique e_0, e_1, ..., e_d de $\mathcal{P}_d$ définie par $e_i(x) = x^i$ pour tout $i = 0, ..., d$:

$$p = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j e_j.$$

On sait alors que p vérifie $p(a_i) = f_i$, $\forall i = 0, 1, ..., d$ si et seulement si

$$\forall i = 0, 1, ..., d, \quad \sum_{j=0}^{d} \alpha_j (a_i)^j = f_i. \tag{2.2}$$

(2.2) est un système linéaire de $d+1$ équations à $d+1$ inconnues (α_0, α_1, ..., α_d). Or le déterminant de ce système linéaire est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_i & \ldots & a_i^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_d & \ldots & a_d^d \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=0}^{i-1} (a_i - a_j).$$

On l'appelle le déterminant de Van der Monde. Comme les a_i sont tous distincts, on a $\Delta \neq 0$ et le système (2.2) admet une unique solution qui détermine le polynôme p. $\square$

2.2.3 Forme de Lagrange

Soit $A = \{a_0, a_1, ..., a_d\}$ un ensemble de $d+1$ réels distincts.
On définit, pour $j = 0, 1, ..., d$,

$$l_{j,d}(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_{j-1})(x-a_{j+1})...(x-a_d)}{(a_j-a_0)(a_j-a_1)...(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})...(a_j-a_d)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{d} \frac{x-a_k}{a_j-a_k}. \tag{2.3}$$

Les polynômes définis ci-dessus sont des polynômes de degré d et on les appelle les **polynômes fondamentaux de Lagrange** associés à A.

Proposition 1 *1. Les polynômes $l_{0,d}$, $l_{1,d}$, ..., $l_{d,d}$ vérifient*

$$\forall i = 0, 1, ..., d, \quad \forall j = 0, 1, ..., d, \quad l_{j,d}(a_i) = \delta_{i,j}$$

2. et ils forment une base de $\mathcal{P}_d$.

Preuve :

1. Soit i et j deux entiers entre 0 et d. On a simplement

$$l_{j,d}(a_j) = \frac{(a_j-a_0)(a_j-a_1)...(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})...(a_j-a_d)}{(a_j-a_0)(a_j-a_1)...(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})...(a_j-a_d)} = 1$$

   et pour $j \neq i$, on a

$$l_{j,d}(a_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{d} \frac{a_i-a_k}{a_j-a_k} = 0,$$

   parce que i sera l'un des k.
2. Comme il y a $d+1$ polynômes $l_{j,d}$ et que $\mathcal{P}_d$ est de dimension $d+1$, il suffit de montrer que les $l_{j,d}$ forment bien une famille de polynômes linéairement indépendants.
   En effet, si $\sum_{j=0}^{d} \alpha_j l_{j,d} = 0$, en utilisant le point précédent, on a $\forall i = 0, ..., d$, $\alpha_i = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j \delta_{ji} = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j l_{j,d}(a_i) = 0$.

$\square$

Théorème 4 *Soit $A = \{a_0, a_1, ..., a_d\}$ un ensemble de $d+1$ réels distincts. Quels que soient les $d+1$ réels f_0, f_1, ..., f_d, le seul polynôme $p \in \mathcal{P}_d$ tel que $p(a_i) = f_i$, $\forall i = 0, 1, ..., d$ se met sous la forme (dite de Lagrange)*

$$p = \sum_{j=0}^{d} f_j l_{j,d}. \tag{2.4}$$

Preuve : L'existence et l'unicité de p a déjà été établie au théorème 3. Il reste à montrer que la forme proposée de p satisfait bien les équations $p(a_i) = f_i$, $\forall i = 0, 1, ..., d$. En effet, quel que soit i entier entre 0 et d, on a

$$p(a_i) = \sum_{j=0}^{d} f_j l_{j,d}(a_i) = \sum_{j=0}^{d} f_j \delta_{ji} = f_i,$$

en utilisant le théorème 2. □

Les nombres a_i s'appellent les **points d'interpolation** et les valeurs f_i sont les **valeurs interpolées**.

Lorsque $f_i = f(a_i)$, f est la **fonction interpolée**. L'unique polynôme $p \in \mathcal{P}_d$ tel que $p(a_i) = f(a_i)$, $\forall i = 0, 1, ..., d$ s'appelle alors le **polynôme d'interpolation de Lagrange** de f aux points a_i. On peut le noter $L[a_0, a_1, ..., a_d; f]$ ou bien $L[A; f]$.

Cette dernière notation est parfaitement valable parce que le polynôme d'interpolation de f aux points a_i dépend uniquement de l'ensemble des points et pas de la manière dont ces points sont ordonnés.

Exemple : calculer $L[0, \pi/2, \pi; cos]$.

COURS 2 - semaine 1 + exercices parmi les numéros 6 à 11

2.2.4 Propriétés algébriques et linéarité

Il est essentiel de retenir l'équivalence suivante

$$\left.\begin{array}{l} p \in \mathcal{P}_d \\ p(a_i) = f(a_i), \forall i = 0, 1, ..., d \end{array}\right\} \Leftrightarrow p = L[a_0, a_1, ..., a_d; f]. \tag{2.5}$$

Remarque 2 *Il en découle naturellement que si $p \in \mathcal{P}_d$, alors $L[a_0, a_1, ..., a_d; p] = p$. Attention, ceci n'est valable que si p est un polynôme de degré inférieur ou égal à d ! !*

Proposition 2 *Quel que soit l'entier d, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{j=0}^{d} l_{j,d}(x) = 1$.*

Preuve : Notons e_0 le polynôme constant égal à 1. Quel que soit l'entier naturel d, $e_0 \in \mathcal{P}_d$. En tenant compte de la remarque 2, on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} 1 & \equiv & e_0 \\ & = & L[a_0, a_1, ..., a_d; e_0] \\ & = & \sum_{j=0}^{d} e_0(a_j) l_{j,d} \\ & = & \sum_{j=0}^{d} l_{j,d}. \end{array}$$

. □

Exercice 2 *On peut prouver ce résultat par le calcul pour $d = 1$ (2 points d'interpolation) ou $d = 2$ (3 points d'interpolation).*

Théorème 5 *Soit $A = \{a_0, a_1, ..., a_d\}$ un ensemble de $d + 1$ réels distincts. L'application qui à f définie au moins sur A fait correspondre $L[A; f]$ est linéaire. Cela signifie que pour toutes fonctions f et g définies au moins sur A et pour tout réel λ, on a*

$$\left\{\begin{array}{rcl} L[A; f + g] & = & L[A; f] + L[A; g], \\ L[A; \lambda f] & = & \lambda L[A; f]. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Preuve : En utilisant la forme de Lagrange du polynôme d'interpolation de f relativement à A, on a

$$\begin{array}{rcl} L[A; f+g] & = & \sum_{j=0}^{d}(f+g)(a_j)l_{j,d} \\ & = & \sum_{j=0}^{d}\Big(f(a_j)+g(a_j)\Big)l_{j,d} \\ & = & \sum_{j=0}^{d}\Big(f(a_j)l_{j,d}+g(a_j)l_{j,d}\Big) \\ & = & \sum_{j=0}^{d}f(a_j)l_{j,d}+\sum_{j=0}^{d}g(a_j)l_{j,d} \\ & = & L[A;f]+L[A;g] \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} L[A; \lambda f] & = & \sum_{j=0}^{d}(\lambda f)(a_j)l_{j,d} \\ & = & \sum_{j=0}^{d}\lambda f(a_j)l_{j,d} \\ & = & \lambda\sum_{j=0}^{d}f(a_j)l_{j,d} \\ & = & \lambda L[A;f]. \end{array}$$

□

Exercice 3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M_n(x) = x^n$.*

1. *Déterminer $L[-1, 0, 1; M_n]$.*
2. *En déduire, pour tout polynôme p, une formule pour $L[-1, 0, 1; p]$ en fonction des coefficients de p.*

2.2.5 Algorithme basé sur la forme de Lagrange

Algorithme 1 *Entrées :*
- *le vecteur a des $d+1$ points d'interpolation a_i, $i = 0, 1, ..., d$,*
- *le vecteur f des $d+1$ valeurs d'interpolation f_i, $i = 0, 1, ..., d$,*
- *le point x.*

Le résultat est dans P.

1. $P := 0$;
2. *Pour j de 0 à d faire*
   (a) $L := 1$
   (b) *Pour k de 0 à $j-1$ faire* $L := L \times (x - a_k)/(a_j - a_k)$
   Pour k de $j+1$ à d faire $L := L \times (x - a_k)/(a_j - a_k)$
   (c) $P := P + f_j \times L$

Théorème 6 *L'algorithme 1 nécessite $2(2d+1)(d+1) \sim 4d^2$ opérations.*

Remarque 3 *Soient 2 suites $(u_d)_{d\in\mathbb{N}}$ et $(v_d)_{d\in\mathbb{N}}$ telles que tous les v_d sont non nuls. On dira que les deux suites sont équivalentes lorsque $d \to \infty$ et on notera $u_d \sim v_d$ lorsque $\lim\limits_{d\to\infty} \dfrac{u_d}{v_d} = 1$.*

Preuve : On décompte ici le nombre d'opérations du type $+$, $-$, $\times$ et $/$.

L'étape 1 ne nécessite aucune opération du type précédent.

Pour chaque j de l'étape 2,
- l'étape 2b demande $j + (d-j) = d$ multiplications, autant de divisions et $2d$ soustractions
- et l'étape 2c demande 1 multiplication et 1 addition.

Au total, l'algorithme demande donc

$$\sum_{j=0}^{d}\Big(d(\times)+d(/)+2d(-)+1(\times)+1(+)\Big)=\sum_{j=0}^{d}(4d+2)=(4d+2)\sum_{j=0}^{d}1=2(2d+1)(d+1)$$

opérations.

Il est facile de vérifier que

$$\lim_{d\to\infty}\frac{2(2d+1)(d+1)}{4d^2}=\lim_{d\to\infty}\frac{2d+1}{2d}\frac{d+1}{d}=\lim_{d\to\infty}\left(1+\frac{1}{2d}\right)\left(1+\frac{1}{d}\right)=1.$$

$\square$

demo sous Matlab !!

Dans la figure 2.1, on compare la fonction $x\mapsto x\sin(\pi x)$ (rouge) à son interpolant de Lagrange (bleu) relativement aux $d+1$ points équidistants dans $[-1,1]$, $a_i=-1+2i/d$, $i=0,1,...,d$ pour différentes valeurs de d.

On constate que l'interpolant se rapproche de plus en plus de la fonction sur $[-1,1]$ pour d allant de 3 à 6. En revanche, l'approximation est mauvaise en dehors de cet intervalle $[-1,1]$.

Ceci étant dit, comme la fonction considérée ici est très régulière, en augmentant encore d, par exemple pour $d=12$, le polynôme s'approche de la fonction même en dehors de l'intervalle $[-1,1]$.

On constatera plus loin (cf. section 2.4) que le polynôme d'interpolation de Lagrange relativement aux points équidistants ne constitue pas une bonne approximation de certaines fonctions.

2.2.6 Étude de l'erreur

Soit $A=\{a_0,a_1,...,a_d\}$ un ensemble de $d+1$ réels distincts et f une fonction à interpoler.

Comme $L[A;f]$ est égal à f en tous les points a_i, $i=0,1,...,d$, il est naturel d'espérer que la différence entre $L[A;f]$ et f soit petite en les autres points x, au moins en les points x pas trop éloignés des a_i.

Pour mesurer cette différence, on cherche à estimer (généralement majorer) la quantité

$$E(x)=|f(x)-L[A;f](x)|.$$

En fait, $E(x)$ dépend de la fonction à interpoler f et du choix des points a_i.

On note $\Pi_A(x)=\prod_{k=0}^{d}(x-a_k)$.

Théorème 7 *Soient $A=\{a_0,a_1,...,a_d\}\subset[a,b]$ et $f\in C^{d+1}([a,b])$. On suppose que $a_0<a_1<a_2<...<a_d$. Alors pour tout $x\in[a,b]$, il existe $\alpha_x\in]a,b[$ tel que*

$$f(x)-L[A;f](x)=\frac{f^{(d+1)}(\alpha_x)}{(d+1)!}\Pi_A(x). \tag{2.7}$$

COURS 1 - semaine 2 + exercices parmi les numéros 13 à 16

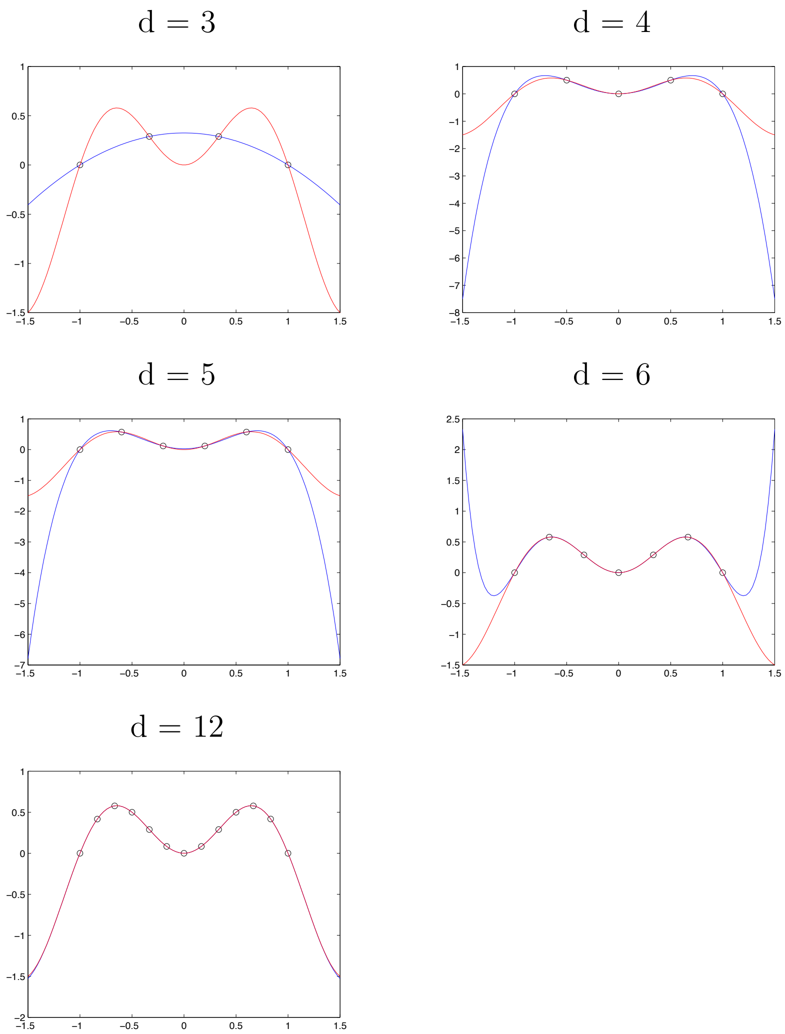


FIG. 2.1 – Fonction $x \mapsto x\sin(\pi x)$ (en rouge) et l'interpolant de Lagrange correspondant (en bleu) relativement aux points $a_i = -1 + 2i/d$, $i = 0, 1, ..., d$ (cercles noirs), pour différentes valeurs du degré d.

Remarque 4 *Dans le cas $d = 0$ et $A = \{a_0\}$, on a $L[a_0; f](x) = f(a_0)$ pour tout réel x. Le théorème précédent affirme simplement que pour tout réel $x \in [a, b]$, il existe $\alpha_x \in]a, b[$ tel que*

$$f(x) - f(a_0) = f'(\alpha_x)(x - a_0).$$

Ce n'est rien d'autre que le théorème des accroissements finis (Pour toute fonction définie continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$) !

Preuve : Soit x fixé dans $[a, b]$. Par souci de clarté, on pose $p = L[A; f]$.

* Naturellement, si x est l'un des a_i, le résultat est trivial.
* On suppose donc que $x \neq a_i$ pour tout $i = 0, 1, ..., d$.

  On pose $q(t) := p(t) + \dfrac{f(x) - p(x)}{\Pi_A(x)}\Pi_A(t)$. Par construction, il s'agit d'un polynôme en t de degré $d + 1$.

  On pose encore $F(t) = f(t) - q(t)$. Par construction, $F \in C^{d+1}([a, b])$.

  On a alors

$$\begin{array}{rcl} \forall i = 0, 1, ..., d, \quad F(a_i) & = & f(a_i) - q(a_i) \\ & = & f(a_i) - \left(p(a_i) + \dfrac{f(x) - p(x)}{\Pi_A(x)}\Pi_A(a_i)\right) \\ & = & f(a_i) - \left(p(a_i) + 0\right) \\ & = & f(a_i) - p(a_i) \\ & = & 0 \end{array}$$

  et

$$F(x) = f(x) - q(x) = f(x) - \left(p(x) + \frac{f(x) - p(x)}{\Pi_A(x)}\Pi_A(x)\right) = 0.$$

  On en déduit que F admet $d+2$ zéros que nous notons $a \leq y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_{d+1} \leq b$.

  En utilisant le théorème de Rolle (*Pour toute fonction définie continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$*) sur $[y_i, y_{i+1}]$ pour $i = 0, ..., d$, on obtient que F' admet $d + 1$ zéros distincts.

  Par récurrence, on en déduit que $F^{(d+1)}$ admet 1 zéro : $\exists \alpha_x \in]a, b[$ tel que $F^{(d+1)}(\alpha_x) = 0$.

  Par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl} F^{(d+1)}(t) & = & f^{(d+1)}(t) - q^{(d+1)}(t) \\ & = & f^{(d+1)}(t) - \left(p^{(d+1)}(t) + \dfrac{f(x) - p(x)}{\Pi_A(x)}\Pi_A^{(d+1)}(t)\right). \end{array}$$

  Comme p est un polynôme de degré d, on a $p^{(d+1)}(t) = 0$. Ensuite, par définition de Π_A, on a $\Pi_A^{(d+1)}(t) = (d + 1)!$.

  Finalement, on aboutit à $F^{(d+1)}(t) = f^{(d+1)}(t) - \dfrac{f(x) - p(x)}{\Pi_A(x)}(d + 1)!$.

  Ainsi,

$$0 = F^{(d+1)}(\alpha_x) = f^{(d+1)}(\alpha_x) - \frac{f(x) - p(x)}{\Pi_A(x)}(d + 1)!$$

  d'où le résultat demandé.

$\square$

Exercice 4 *Soit $a \leq a_0 < a_1 \leq b$.*

1. *On suppose que f est une fonction strictement convexe deux fois dérivable sur $[a, b]$.*

(a) *Montrer que* $f(x) - L[A; f](x) < 0$ *pour tout* $x \in]a_0, a_1[$.

(b) *Que dire en dehors de l'intervalle* $[a_0, a_1]$ *?*

2. *Mêmes questions dans le cas des fonctions strictement concaves et 2 fois dérivables sur* $[a, b]$.

Corollaire 1 *Soient* $A = \{a_0, a_1, ..., a_d\} \subset [a, b]$ *et* $f \in C^{d+1}([a, b])$. *On suppose que* $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_d$. *Alors pour tout* $x \in [a, b]$,

$$E(x) \leq \frac{\|f^{(d+1)}\|_{\infty,[a,b]}}{(d+1)!} |\Pi_A(x)| .$$

On a aussi

$$\|f - L[A; f]\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\|f^{(d+1)}\|_{\infty,[a,b]}}{(d+1)!} \|\Pi_A(x)\|_{\infty,[a,b]}. \tag{2.8}$$

On rappelle que $\|h\|_{\infty,[a,b]} := \sup_{t\in[a,b]} |h(t)|$.

Exercice 5 *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $f(x) = \sqrt{x}$. *Soient* $a_0 = 100$, $a_1 = 121$ *et* $a_2 = 144$.

1. *Calculer* $L[a_0, a_1, a_2; f](115)$.
2. *Montrer (sans évaluer le membre de gauche) que* $|\sqrt{115} - L[a_0, a_1, a_2; f](115)| < 1.8\ 10^{-3}$.

La majoration (2.8) montre que pour une fonction à interpoler f donnée, si nous avons le choix des points d'interpolation dans $[a, b]$, nous avons intérêt à choisir ces points de telle sorte que la quantité $\|\Pi_A(x)\|_{\infty,[a,b]}$ soit minimale. Il existe un unique ensemble de points qui minimise cette quantité. On les appelle les points de Chebyshev en hommage au mathématicien russe qui les a déterminés pour la première fois en 1874. Lorsque $[a, b] = [-1, 1]$, ces points sont donnés par la formule

$$a_i = \cos\left(\frac{2i+1}{d+1}\frac{\pi}{2}\right), i = 0, 1, ..., d.$$

On peut comparer la répartition des points de Chebyshev à celle des points équidistants sur l'intervalle $[-1, 1]$ pour $d = 12$ sur les graphiques de la figure 2.2. Les premiers tendent à être en nombre plus important aux extrémités de l'intervalle.

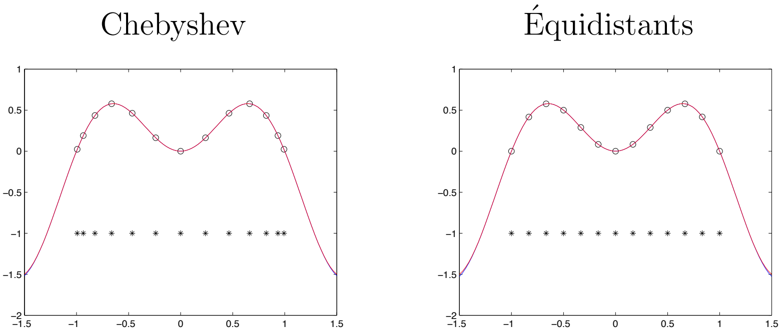


FIG. 2.2 – Répartition des points de Chebyshev et des points équidistants (les étoiles noires) sur $[-1, 1]$ et tracé de la fonction $x \mapsto x\sin(\pi x)$ (en rouge) et de l'interpolant de Lagrange correspondant (en bleu) pour $d = 12$.

2.3 Forme de Newton

Dans toute cette section, on note $A = \{a_0, a_1, ..., a_d\} \subset [a, b]$ un ensemble de $d + 1$ réels distincts et f la fonction à interpoler, définie au moins sur A. Dans la forme de Lagrange du polynôme d'interpolation de f relativement à A, ajouter un point d'interpolation dans A nécessite de recommencer tous les calculs. C'est pour éviter cela que l'on introduit la forme de Newton de $L[A; f]$. Comme elle définit le polynôme d'interpolation par récurrence, ajouter un point dans A devient peu coûteux.

2.3.1 Les différences divisées

Définition 1 *On note $f[a_0, a_1, ..., a_d]$ le coefficient de x^d dans le polynôme $L[A; f](x)$ et on l'appelle la d-ième différence divisée de f aux points $a_0, a_1, ..., a_d$.*

Exemple :

1. Si $d = 0$ et $A = \{a_0\}$, $L[A; f](x) = f(a_0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Le coefficient de $x^0 = 1$ est $f(a_0)$ et donc
$$f[a_0] = f(a_0).$$
2. Si $d = 1$ et $A = \{a_0, a_1\}$, $L[A; f](x) = f(a_0)\dfrac{x - a_1}{a_0 - a_1} + f(a_1)\dfrac{x - a_0}{a_1 - a_0}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Le coefficient de $x^1 = x$ dans ce polynôme est
$$f(a_0)\frac{1}{a_0 - a_1} + f(a_1)\frac{1}{a_1 - a_0},$$
donc
$$f[a_0, a_1] = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}.$$

Exercice 6 *Montrer que*

1. $f[a_0, a_1, ..., a_d] = \displaystyle\sum_{j=0}^{d} f(a_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{d} \frac{1}{a_j - a_k}$;
2. *la valeur de $f[a_0, a_1, ..., a_d]$ ne dépend pas de l'ordre des points.*

2.3.2 La forme de Newton

Théorème 8

$$L[A; f](x) = \sum_{j=0}^{d} f[a_0, a_1, ..., a_j](x - a_0)(x - a_1)...(x - a_{j-1}).$$

Remarque 5 *Dans la formule ci-dessus, lorsque $j = 0$, le produit $(x - a_0)(x - a_1)...(x - a_{j-1})$ n'a pas de sens. Par convention, on le prend égal à 1. On a donc en pratique*

$$L[A; f](x) = f[a_0] + \sum_{j=1}^{d} f[a_0, a_1, ..., a_j](x - a_0)(x - a_1)...(x - a_{j-1}).$$

Exemple : Lorsque $d = 1$ et $A = \{a_0, a_1\}$, on a

$$L[A; f](x) = f[a_0] + f[a_0, a_1](x - a_0) = f(a_0) + \frac{f(a_1) - f(a_0)}{x_1 - x_0}(x - a_0).$$

Preuve : On procède par récurrence sur d.

1. Hypothèse de récurrence pour $d \geq 0$:

$$(HR_d) \quad L[a_0, a_1, ..., a_d; f](x) = \sum_{j=0}^{d} f[a_0, a_1, ..., a_j](x - a_0)(x - a_1)...(x - a_{j-1}).$$

2. Initialisation : $d = 0$.
   On a bien $L[A; f](x) = f(a_0) = f[a_0]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Hérédité : on suppose (HR_l) vraie et on montre que (HR_{l+1}) est vraie.
   Considérons le polynôme q défini pour tout réel x par

$$q(x) = L[a_0, a_1, ..., a_{l+1}; f](x) - f[a_0, a_1, ..., a_{l+1}](x - a_0)(x - a_1)...(x - a_l).$$

   Par construction, $q \in \mathcal{P}_{l+1}$ comme différence de polynômes de $\mathcal{P}_{l+1}$. Mais les coefficients de plus haut degré des deux polynômes sont identiques : il s'agit de $f[a_0, a_1, ..., a_{l+1}]$. Le polynôme q est donc finalement dans $\mathcal{P}_l$.
   De plus, pour tout entier i entre 0 et l,

$$\begin{aligned} q(a_i) &= L[a_0, a_1, ..., a_{l+1}; f](a_i) - f[a_0, a_1, ..., a_{l+1}](a_i - a_0)(a_i - a_1)...(a_i - a_l) \\ &= f(a_i) - 0 = f(a_i). \end{aligned}$$

   Des deux propriétés ci-dessus, on déduit que $q = L[a_0, a_1, ..., a_l; f]$.
   Étant donné la définition de q, on obtient pour tout x réel

$$L[a_0, a_1, ..., a_{l+1}; f](x) = L[a_0, a_1, ..., a_l; f](x) + f[a_0, a_1, ..., a_{l+1}](x - a_0)(x - a_1)...(x - a_l).$$

   En utilisant finalement (HR_l), on aboutit à

$$\begin{aligned} L[a_0, a_1, ..., a_{l+1}; f](x) &= L[a_0, a_1, ..., a_l; f] + f[a_0, a_1, ..., a_{l+1}](x - a_0)(x - a_1)...(x - a_l) \\ &= \sum_{j=0}^{l} f[a_0, a_1, ..., a_j](x - a_0)(x - a_1)...(x - a_{j-1}) \\ &\quad + f[a_0, a_1, ..., a_{l+1}](x - a_0)(x - a_1)...(x - a_l) \\ &= \sum_{j=0}^{l+1} f[a_0, a_1, ..., a_j](x - a_0)(x - a_1)...(x - a_{j-1}). \end{aligned}$$

   On a bien montré que (HR_{l+1}) est vraie.
4. Conclusion : on a montré que (HR_d) est vraie pour tout $d \geq 0$.

□

2.3.3 Formule de récurrence pour les différences divisées

Théorème 9 *Les différences divisées s'obtiennent par récurrence : pour tout entier $l \geq 1$,*

$$f[a_0, a_1, ..., a_l] = \frac{f[a_1, a_2, ..., a_l] - f[a_0, a_1, ..., a_{l-1}]}{a_l - a_0}.$$

Preuve : Soit un entier $l \geq 1$. Notons $p_{l-1} = L[a_0, a_1, ..., a_{l-1}; f]$ et $p^*_{l-1} = L[a_1, a_2, ..., a_l; f]$.

Par construction, ces 2 polynômes sont dans $\mathcal{P}_{l-1}$ et les coefficients de plus haut degré sont respectivement $f[a_0, a_1, ..., a_{l-1}]$ et $f[a_1, a_2, ..., a_l]$.

Soit $q_l(x) = \dfrac{(x - a_0)p^*_{l-1}(x) - (x - a_l)p_{l-1}(x)}{a_l - a_0}$.

Par construction, $q_l \in \mathcal{P}_l$ et

* $q_l(a_0) = p_{l-1}(a_0) = f(a_0)$;
* $q_l(a_l) = p^*_{l-1}(a_l) = f(a_l)$;
* pour tout entier i entre 1 et $l - 1$,

$$\begin{aligned} q_l(a_i) &= \frac{(a_i - a_0)p^*_{l-1}(a_i) - (a_i - a_l)p_{l-1}(a_i)}{a_l - a_0} \\ &= \frac{(a_i - a_0)f(a_i) - (a_i - a_l)f(a_i)}{a_l - a_0} \\ &= f(a_i)\frac{(a_i - a_0) - (a_i - a_l)}{a_l - a_0} \\ &= f(a_i). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que $q_l = L[a_0, a_1, ..., a_l; f]$.

On obtient le résultat en identifiant les coefficients de plus haut degré des deux membres de cette égalité. $\square$

Exemple : Calculer $L[0, \pi/2, \pi; \cos]$, puis $L[0, \pi/2, \pi, -\pi; \cos]$.

COURS 1 - semaine 3

2.3.4 Algorithme

Dans l'algorithme ci-dessous, la première étape consiste à calculer toutes les différences divisées suivantes et à les stocker dans une matrice D,

	Numéros de colonnes	1		2			$d+1$
Numéros de lignes							
1	a_0	$f[a_0]$					
			$\backslash$				
2	a_1	$f[a_1]$	$-$	$f[a_0, a_1]$			
			$\backslash$		$\backslash$		
3	a_2	$f[a_2]$	$-$	$f[a_1, a_2]$	$-$	$\cdots$	
	$\vdots$	$\vdots$					
d	a_{d-1}	$f[a_{d-1}]$					
			$\backslash$		$\backslash$		
$d+1$	a_d	$f[a_d]$	$-$	$f[a_{d-1}, a_d]$	$-$	$\cdots$	$f[a_0, a_1, ..., a_d]$

puis à évaluer le polynôme d'interpolation en un point x au moyen de la forme de Newton

$$L[A;f](x) = \sum_{j=0}^{d} f[a_0, a_1, ..., a_j](x - a_0)(x - a_1)...(x - a_{j-1}).$$

Algorithme 2 *Entrées :*
- *le vecteur a des $d+1$ points d'interpolation a_i, $i = 0, 1, ..., d$,*
- *le vecteur f des $d+1$ valeurs d'interpolation f_i, $i = 0, 1, ..., d$,*
- *le point x.*

Le résultat est dans P.

1. *Pour i de 0 à d faire $D_{i+1,1} = f(a_i)$*
   Pour j de 1 à d faire
   Pour i de j à d faire $D_{i+1,j+1} = (D_{i+1,j} - D_{i,j})/(a_i - a_{i-j})$
   Fin du pour
2. $P = 0$
   $\pi = 1$
   Pour j de 0 à d faire
   $P = P + D_{j+1,j+1} * \pi$
   $\pi = \pi * (x - a_j)$
   Fin du pour

Théorème 10 *L'algorithme 2 nécessite $\dfrac{(d+1)(3d+8)}{2} \sim \dfrac{3}{2}d^2$ opérations.*

Preuve : Dans l'étape 1 de calcul des différences divisées, il est réalisé le nombre suivant d'opérations

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=j}^{d} 2(-) + 1(/) &= \sum_{j=1}^{d} 3(d - j + 1) \\ &= 3\Big(d(d+1) - \frac{d(d+1)}{2}\Big) \\ &= \frac{3}{2}d(d+1).\end{aligned}$$

Dans l'étape 2 d'évaluation du polynôme, il est effectué le nombre suivant d'opérations

$$\sum_{j=0}^{d} 1(+) + 1(-) + 2(*) = 4(d+1).$$

Au total, cet algorithme nécessite donc $\dfrac{3}{2}d(d+1) + 4(d+1) = \dfrac{(d+1)(3d+8)}{2} \sim \dfrac{3}{2}d^2$ opérations. □

2.3.5 Étude de l'erreur (non fait en cours)

Théorème 11

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) - L[A;f](x) = \Pi_A(x) f[a_0, a_1, ..., a_d, x].$$

Remarque 6 *On rappelle que $\Pi_A(x) = \prod_{k=0}^{d}(x - a_k)$.*

Preuve : Soit $x \in [a, b]$. On considère le polynôme q défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$q(t) = L[A; f](t) + \Pi_A(t) f[a_0, a_1, ..., a_d, x].$$

Par construction, q est un polynôme de degré $\leq d + 1$ et l'écriture suivante

$$\begin{aligned} q(t) &= L[A; f](t) + \Pi_A(t) f[a_0, a_1, ..., a_d, x] \\ &= \sum_{j=0}^{d} f[a_0, a_1, ..., a_j](t - a_0)(t - a_1)...(t - a_{j-1}) \\ &\quad + f[a_0, a_1, ..., a_d, x](t - a_0)(t - a_1)...(t - a_d) \end{aligned}$$

montre que $q = L[a_0, a_1, ..., a_d, x; f]$.

En particulier, $q(x) = f(x)$ et ainsi

$$f(x) - L[A; f](x) = \Pi_A(x) f[a_0, a_1, ..., a_d, x].$$

□

2.4 Phénomène de Runge

Il est assez naturel de penser que le polynôme d'interpolation de Lagrange approche d'autant mieux la fonction interpolée que le nombre de points d'interpolation est grand.

Cette idée reste correcte pour une grande classe de fonctions et pour des points d'interpolation correctement choisis, mais elle est fausse en général.

En particulier, quels que soient les points d'interpolation choisis, il est toujours possible de trouver une fonction continue qui ne se laisse pas approcher par les polynômes d'interpolation correspondants.

2.4.1 Exemple classique de Runge

Il a été donné par Runge (allemand, 1856-1927) en 1901 : les polynômes d'interpolation aux points équidistants de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

donnent des résultats très mauvais (cf. figure 2.3).

2.4.2 Les points de Chebyshev

Il est possible de montrer que, pour des fonctions dérivables et de dérivée bornée, les polynômes d'interpolation aux points de Chebyshev convergent uniformément vers la fonction interpolée lorsque le nombre $d + 1$ de points d'interpolation tend vers l'infini (cf. figure 2.4).

Remarque 7 – *La convergence peut être lente ;*

– *on dit que la suite de fonctions $(f_d)_{d \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f lorsque d tend vers l'infini si la suite de nombres réels positifs $\|f - f_d\|_\infty$ converge vers 0 lorsque d tend vers l'infini.*

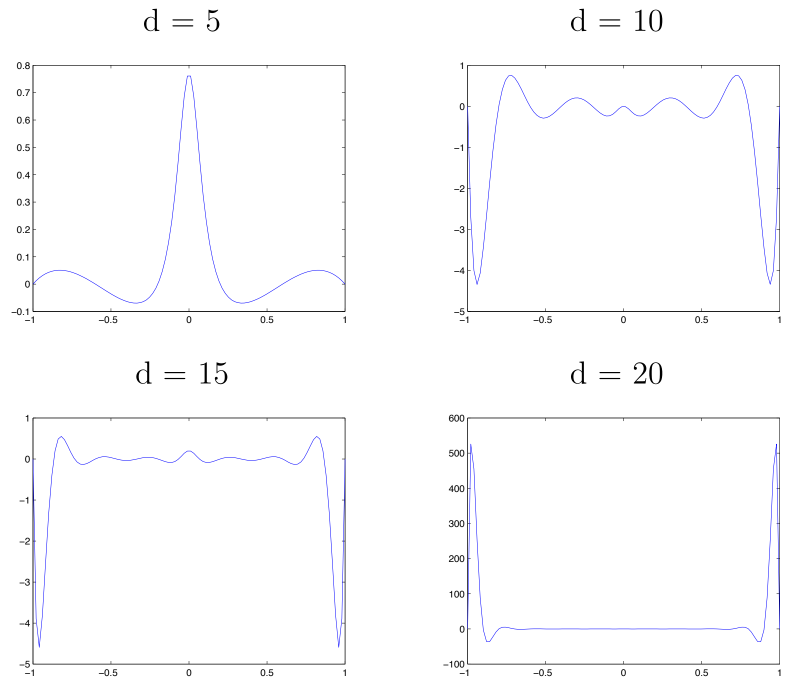


FIG. 2.3 – Graphes de l'erreur entre la fonction f définie par $f(x) = 1/(1 + 100x^2)$ et ses interpolants de Lagrange correspondants relativement aux points équidistants $a_i = -1 + 2i/d$, $i = 0, 1, ..., d$, pour différentes valeurs du degré d.

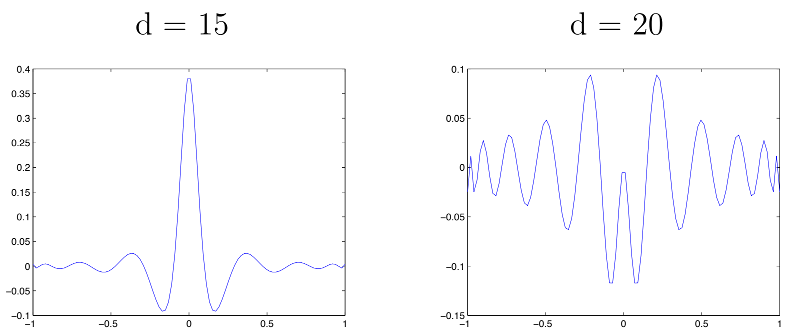


FIG. 2.4 – Graphes de l'erreur entre la fonction f définie par $f(x) = 1/(1 + 100x^2)$ et ses interpolants de Lagrange correspondants relativement aux points de Chebyshev, pour différentes valeurs du degré d.