L2 PCAV Examen de Mathématiques du 16/12/2013

Durée : 2h00

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés.

Les résultats des calculs seront **simplifiés** et laissés sous forme de fraction et puissance.

Il sera tenu compte de la rédaction.

Exercice 1. On considère, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 3, -1)$, $v_3 = (-1, -6, 5)$ et $v_4 = (0, 0, 1)$.

(1) La famille $\{v_1, v_2\}$ est-elle libre ? Si oui, donner la dimension du sous espace vectoriel F engendré par $\{v_1, v_2\}$ puis identifier F.

(2) Ecrire v_3 comme combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) La famille $\{v_1, v_2, v_4\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2. Pour un certain type d'ampoules, la durée de vie en heure est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité admet une densité f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ te^{-bt} & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

où b est une constante strictement positive.

(1) Pour $x > 0$ calculer l'intégrale $\int_0^x te^{-bt} dt$.

(2) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} te^{-bt} dt$ converge et calculer sa valeur.

(3) En déduire la valeur de b pour que f soit une densité de probabilité.

(4) Donner la fonction de répartition de X.

(5) Calculer la probabilité pour qu'une ampoule fonctionne toujours au bout de 1501 heures sachant qu'elle fonctionne toujours au bout de 1001 heures.

(6) On considère un autre type d'ampoules dont la durée de vie en heure suit une variable aléatoire Y de densité g définie par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Calculer $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t) dt$.

(7) On suppose que X et Y sont indépendantes. Quelle est la densité de la somme $X + Y$?

Tournez la page →

Exercice 3. Dans une population, la probabilité qu'une personne demande à être vaccinée contre la grippe est $p = 0,1$. On constitue, dans cette population, un échantillon de n individus et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes de l'échantillon qui demandent à être vaccinées.

(1) Quelle est la loi de X ?

(2) Pour $n = 10$ calculer la probabilité que trois personnes (exactement) demandent à être vaccinées et la probabilité qu' au moins deux demandent à être vaccinées

(3) On suppose maintenant que $n = 10000$.

   (a) Donner l'espérance et la variance de X.

   (b) Montrer qu'on peut approcher ~~approximer~~ X par une loi normale (qu'on appelle aussi X pour la suite). Donner ses paramètres .
   On note U la loi normale de paramètres 0 et 1 et F_U sa fonction de répartition. On donne $F_U(1,96) = 0,975$ et $F_U(0,8416) = 0,8$

   (c) Calculer $P(941,2 < X < 1058,8)$

   (d) Calculer x tel que $P(X \leq x) = 0,8$

   (e) Pour des raisons de conservation limitée des vaccins, le nombre de vaccins disponibles pour servir cet échantillon de 10000 individus est limité à une valeur x_{lim} qui correspond au nombre maximal de personnes qu'on peut vacciner. On appelle R le risque de ne pouvoir répondre à une demande massive de vaccinations. Quel nombre x_{lim} de vaccins faut-il prévoir pour que le risque R soit égal à 1%? (On donne $F_U(2,33) = 0,99$)

Ex2

(1) on calcul l'intégrale par IPP $\quad u = t \quad u' = 1$

$v' = e^{-bt} \quad v = -\frac{1}{b} e^{-bt}$

$x>0 \quad \int_0^x t e^{-bt} dt = \left[-\frac{t}{b} e^{-bt} \right]_0^x + \frac{1}{b} \int_0^x e^{-bt} dt$

$= \frac{-x}{b} e^{-bx} + \frac{1}{b} \left[-\frac{1}{b} e^{-bt} \right]_0^x$

$= \frac{e^{-bx}}{b} \left(-x - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{b^2}$

(2). $\int_0^{\infty} t e^{-bt} dt = \lim_{x \to \infty} \int_0^x t e^{-bt} dt \overset{Q1}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-bx}}{b} \left(-x - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{b^2}$

car, par croissance comparée $= \frac{1}{b^2}$

$e^{-bx} \left(-x - \frac{1}{b} \right) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

(3). si f est une densité de probabilité $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1$

donc $\int_0^{\infty} t e^{-bt} dt = 1 \iff \frac{1}{b^2} = 1$

$\iff (b+1)(b-1) = 0 \quad$ donc $b = 1$ car $b > 0$.

4). si $x \leq 0 \quad \mathbb{P}(X \leq x) = 0 \quad$ (def de f)

si $x > 0 \quad \underbrace{\mathbb{P}(X \leq x)}_{\int_0^x f(t)dt} \underset{\substack{(b=1) \\ + \text{calculs } Q1}}{=} e^{-x}(-x-1) + 1$

1

Examen 16/12/13

Ex1

1). on montre facilement que $v_1 \nparallel v_2$ donc $B = \{v_1, v_2\}$ est une famille libre. Ainsi $\dim Vect(B) = 2$

identifions $F = Vect(B)$. Soit $v \in F$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

tq $v = \lambda v_1 + \mu v_2$

on obtient le système suivant. $\begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 3\mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$ Resolvons i.e par exprimer λ et μ en fct de x, y, z

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{y}{3} \\ \lambda = x - \frac{2}{3}y \\ \lambda = z + \frac{y}{3} \end{cases}$ Ainsi v doit verifier.
$x - \frac{2}{3}y = z + y/3$
ie $z + y - x = 0$: (P)

F est le plan d'equation $z + y - x$, en effet v_1 et $v_2 \in F$

~~(on avait mq $F \subset P$, et puisque $v_1, v_2 \in P \Rightarrow$~~

donc $Vect(v_1, v_2) = F \subset P$: $\dim F = \dim P = 2$ donc $F = P$

2). on trouve que $v_3 = -2v_2 + 3v_1$ donc $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est liée, B n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

3). i) 1er solution on calcule $\det(v_1, v_2, v_4) \neq 0$
donc $B = \{v_1, v_2, v_4\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$
, $\dim(Vect\, B) = 3$ cela implique B base de $\mathbb{R}^3$

ii) 2ème sol on mq $v_4 \nparallel v_1$ et $v_4 \nparallel v_2$
(puisque $\{v_1, v_2\}$ est libre. cv 1) $\Rightarrow$ B libre.
$card(B) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

(2)

(5) calculons $\mathbb{P}(X > 1501 \mid X > 1001)$

$$= \frac{\mathbb{P}(X > 1501)}{\mathbb{P}(X > 1001)} \quad \text{car} \quad X > 1501 > 1001$$

$$= \frac{1 - F_X(1501)}{1 - F_X(1001)} = \dots \text{ Appli numérique}$$

(6).

$x \in \mathbb{R}$ $\quad f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$

$$= \int_0^{\infty} t e^{-t} g(x-t)\, dt$$

si $x \geq 0$

$$= \int_0^{x} t e^{-t} \underbrace{g(x-t)}_{e^{-(x-t)} \text{ car } x \geq t \text{ ie } x-t \geq 0} dt + \int_x^{+\infty} t e^{-t} \underbrace{g(x-t)}_{0 \text{ car } x-t < 0} dt$$

$$= \int_0^{x} t e^{-x}\, dt = e^{-x} \frac{x^2}{2}$$

si $x < 0$ $\quad f * g(x) = 0$.

donc $\quad f * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} \dfrac{x^2}{2} & x \geq 0 . \end{cases}$

(7) si $X \perp Y$ la densité de $Z = X + Y$ est donnée par $f * g$.

Ex3 (1) on considère l'épreuve de Bernoulli suivante

S: succès = vouloir être vacciné $\quad P(S) = 0,1 = p$

échec = ne pas " "

On répète n fois cette épreuve de façon indépendante et l'on note X la va qui compte le nb de succès.

Alors $X \sim B(n,p)$ et $\forall_{0\leq k\leq n}$ $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2) i) $n=10$ $\quad P(X=3) = \binom{10}{3} (0,1)^3 (0,9)^7 = ..$ Appli Numérique

ii) - $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = ...$ A.N

(3). a). cons. $E[X] = np = 1000$ $\quad V(X) = np(1-p) = 900$.

b). On peut approcher une loi Binomiale par une loi Normale

si $n = 10\,000 \geq 2,5$ ✓ $\quad np = 1000 \geq 5$ ✓ $\quad n(1-p) = 9000 \geq 5$

Alors $P(X=k) \simeq P(k-\frac{1}{2} < N < k+\frac{1}{2})$

où $N \sim \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ $\quad U = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

(c) on doit se ramener à une $\mathcal{N}(0,1)$

$P(941,2 < X < 1058,8) = P\left(\frac{941,2-np}{\sqrt{np(1-p)}} < U < \frac{1058,8-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

$= ...$ m̂ types de calculs que examen précédent.

(d) - $P(X \leq x) = 0,8 \iff P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 0,8$

$\quad\quad \| $

$F_U\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 0,8$

OR $F_U(0,8416) = 0,8$ donc $\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}} = 0,8416$

donc $x = \sqrt{np(1-p)}\; 0,8416 + np =$ A.N

(e) voir exo Td du m̂ genre pour méthode.