Remise à niveau : probabilités

Kevin Tanguy

7 Novembre 2017, Angers

Cette feuille propose un série d'exercices portant sur certaines notions de probabilités. Voici quelques rappels permettant de résoudre les exercices qui vont suivre.

1 Rappels

Tout d'abord un peu de vocabulaire : une variable aléatoire X est une fonction dont le résultat $X(\omega)$ est aléatoire. Par exemple, considérons le cas d'une pièce équilibrée. De manière pragmatique, n'importe quel individu proposerait l'énoncé suivant : " J'ai une chance sur deux d'obtenir pile ou face". Mathématiquement, on écrirait ceci de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(X = P) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(X = F) = \frac{1}{2} \tag{1.1}$$

avec P correspondant à l'événement "*la pièce tombe sur pile*"et F correspondant à l'événement "*la pièce tombe sur face*". Les relations (1.1) décrivent la loi de la variables aléatoire, c'est-à-dire qu'elles explique comment l'aléa se comporte.

Bien entendu, il existe des aléas beaucoup plus complexe : la possibilité de gagner au loto, la durée de vie d'un appareil électronique, l'évolution du nombre de particule dans une urne d'Ehrenfest,. . .

Voici un premier exemple d'aléa que nous rencontrerons dans les exercices.

1.1 Loi uniforme sur un ensemble fini

Théorème 1. *Soit Ω un ensemble fini. On dit que X suit une loi uniforme sur Ω, si pour tout évenement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,*

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

Exemple 1.1. Considérons un jeu de 32 cartes et appelons X la variable aléatoire qui désigne la carte obtenue lorsque l'on tire une carte au hasard dans le paquet. Alors, dans ce cas, $\Omega = \{\text{ensemble des cartes du paquet}\}$; de plus, si l'on souhaite calculer la probabilité d'obtenir un roi, cela correspond à

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

où $A = \{\text{obtenir un roi}\}$. Grossièrement, cela correspond au rapport suivant *cas favorable/cas possible.*

1.2 Epreuves de Bernoulli et loi Binomiale

Nous allons ensuite nous concentrer sur l'aléa provenant d'une épreuve de Bernoulli. Il s'agit d'un expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles. On présentera, de manière subjective, l'une de ces issues comme un succès (que l'on notera S) et l'autre comme un échec (que l'on désignera par S^c). Voici quelques exemples de telles épreuves :

1. Dans jeu de carte, dans lequel on choisirait une carte au hasard. On pourrait considérer lépreuve de Bernoulli suivante : le succés $S = \{\text{obtenir un roi}\}$ et l'échec $S^c = \{\text{ne pas obtenir un roi}\}$.

2. Concernant la qualité d'un appareil électronique, on pourra s'intéresser à l'épreuve suivante : le succés $S = \{\text{l'appareil tombe en panne}\}$ et l'échec $S^c = \{\text{l'appareil ne tombe pas en panne}\}$.

3. Dans le cadre d'une interrogation par QCM ou l'on répondrait au hasard : le succés $S = \{\text{on a choisi la bonne réponse}\}$ et l'échec $S^c = \{\text{on a choisi une mauvaise réponse}\}$.

4. ...

Remarque. Dans les exercices de cette feuille, une des premières difficultés sera d'identifier clairement l'épreuve de Bernoulli mise en jeu. Supposons à présent que l'on répète une épreuve de Bernoulli (tirer une carte par exemple), un certain nombre de fois, de manière indépendante (signifiant que le résultat de l'épreuve précédente n'influe en rien la résultat de la suivante). Il ne parait pas absurde de compter le nombre de succès que l'on obtenu parmi les répétitions successives de ces épreuves, on désignera par X le nombre de succès. Notons le fait que X est une variables aléatoire puisque sa valeur dépend du résultat d'expériences aléatoires (les épreuves de Bernoulli). Il se trouve que l'on peu préciser le comportement d'un tel aléa à l'aide d'une formule.

Théorème 2 (Loi Binomiale). *Considérons une épreuve de Bernoulli de succès S avec $\mathbb{P}(S) = p \in [0, 1]$. Supposons que l'on répète cette expérience n fois (avec $n \in \mathbb{N}_*$) de manière indépendante. Alors, X la variable aléatoire comptant le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre n, p et*

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \le k \le n \tag{1.2}$$

On notera ceci de la manière suivante : $X \sim B(n, p)$

Remarque. Faisons quelques commentaires sur ce résultat. Tout d'abord, dans un exercice, il faudra déterminer l'épreuve de Bernoulli ainsi que la probabilité de succès p (en reprenant l'exemple 1, dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de tirer un roi est de $p = \frac{1}{8}$). Ensuite, il faudra savoir combien de répétition indépendantes sont faites (cela revient à déterminer la valeur de n). Enfin, l'équation (1.2) permet de calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement k succès sur n tentatives.

Rappelons également que le symbole $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de possibilité de choisir k éléments parmi une liste de n éléments. Cette valeur se calcule à partir de la formule suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$ et $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{avec} \quad n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Par convention $0! = 1$.

Lorsque l'on dispose d'une variable aléatoire, on est souvent amener à calculer certaines quantités lui étant associées. Par exemple sa moyenne $\mathbb{E}[X]$ et sa variance $\mathrm{Var}(X)$, ou plus généralement ses moments.

Proposition 3. *Si $X \sim B(n,p)$ alors*

$$\mathbb{E}[X] = np \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Remarque. Attention, les formules précédentes ne sont valables que pour des variables $X \sim B(n,p)$. De manière générale, pour X une variables al'eatoire à valeurs dans un ensemble discret I, on a

$$\mathbb{E}[X^k] = \sum_{j \in I} j^k \mathbb{P}(X = j) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}_*$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

2 Combinatoire

Cette section a pour objet de manipuler la notion de combinaison, de factorielle et de briévement revoir la notion de probabilité uniforme.

Exercice 1. Dans un jeu de 52 cartes, on tire deux cartes simultanément (sans remise). De combien de manières différentes est-ce possible ?

Exercice 2. Combien de nombres différents de 6 chiffres existe-t-il

1. Si il n'y a aucune restriction ?

2. Si les nombres doivent être divisibles par 5 ?

3. si les répétitions de chiffres sont exclues ?

Exercice 3. Une association A tient son assemblée. Lors de cette assemblée il est prévu d'élire un directoire de deux personnes. Il y a neuf candidats. Paris eux, six sont aussi membres d'une autre association et deux de ceux-ci sont membres de l'association A depuis plus d'un an. Parmi les trois autres candidats, un seul est membre de l'association A depuis plus d'un an. On suppose que les chances de chacun de ses candidats sont égales.

1. Quelle est la probabilité que l'un des élus soit membre d'une autre association et pas l'autre ?

2. Quelle est la probabilité que les deux élus soient des nouveaux venus ?

3. Quelle est la probabilité qu les deux élus soient des nouveaux venus ou que l'un d'entre eux seulement fasse aussi partie d'une autre association ?

3 Loi binomiale

Cette section propose des exercices portant sur la notion de loi binomiale.

Exercice 4. A chaque tir la probabilité pour qu'un tireur touche la cible est de $0,7$. Il tire 3 fois de suite. La variable aléatoire X est définie par le nombre de coups dans la cible.

1. Quelle est la loi de X?

2. Déterminer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 5. On considére un jeu de 32 cartes pour lequel tous les tirages sont supposés équiprobables.

1. On tire une carte dans le jeu. Montrer que la probabilité que la carte soit un “roi ou une dame” vaut $p = 1/4$?

2. On mélange le jeu, on tire une carte on la regarde et on la remet dans le jeu. on effectue 5 tirages successifs. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'on a obtenu “un roi ou une dame”.

   - Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?

   - Déterminer la loi de probabilité de X.

   - Calculer son espérance et sa variance.

3. On effectue n tirages successifs de la même manière. On appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'on a obtenu “un roi ou une dame”. Determiner les valeurs de l'entier n telles que la moyenne d'apparition d'un roi ou d'une dame soit supérieure ou égale à 100.

Exercice 6. Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

On admet que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à $0,6$.

L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question poée.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à $0,9$, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

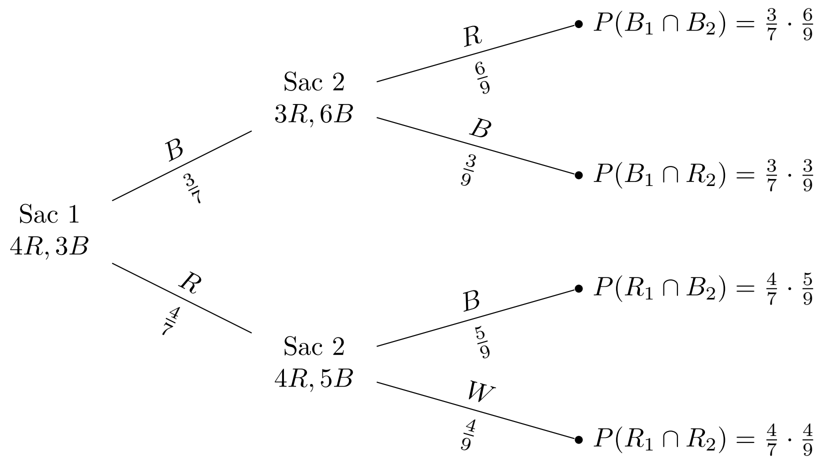
4 Pour aller un peu plus loin

4.1 Loi conditionelle

Rappelons la notion de probabilité conditionnelle. Il s'agit de déterminer la probabilité qu'un évenement A se déroule sachant qu'un évenement B se soit produit. Une telle probabilité est notée $\mathbb{P}(A|B)$ et l'on a

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ce genre de probabilité peut s'écrire sous la forme d'arbre pondéré. Voici un exemple : on dispose de deux sacs de billes, le premier contenant 3 billes rouge et 4 billes bleues ; le second est composé de 3 billes rouges et 5 billes bleues. Les billes sont supposées indiscernable au touché. L'expérience se déroule comme suit : on tire une bille au hasard dans le premier sac pour la placer dans le deuxième. Après avoir mélanger celui-ci, on tire une nouvelle bille dans le second sac. Notons par R_i, $i = 1, 2$ l'événément : “obtenir une bille rouge au i-ème tirage”et par B_i l'évènement “obtenir une bille bleue au i-ème”.



Voici à présent un exercice permettant de se familiariser avec cette nouvelle notion.

Exercice 7. Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées. Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de $0,98$;

- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de $0,01$.

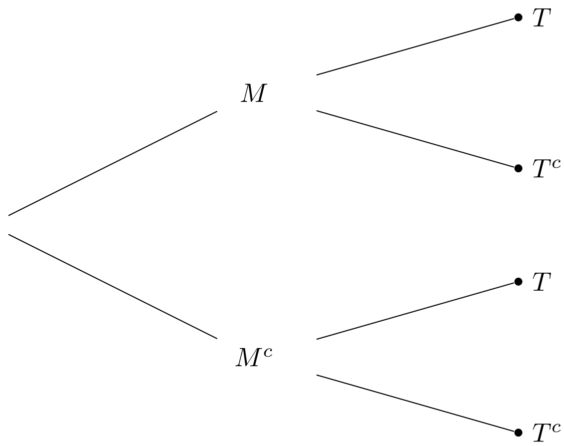
On procède à un test de dépistage systématique dans une population "cible". Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'événement : "L'individu choisi est atteint du chikungunya".

- T l'événement : "Le test de l'individu choisi est positif".

On notera M^c (respectivement T^c) l'évènement contraire de l'événement M (respectivement T). On note par p $(0 \leq p \leq 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. Recopier et completer l'arbre pondéré suivant afin qu'il décrive les évènements présentés ci-dessus.



2. Exprimer $\mathbb{P}(M \cap T)$, $\mathbb{P}(M \cap T)$ puis $\mathbb{P}(T)$ en fonction de p.

3. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :
$$f(p) = \frac{98p}{97p + 1}.$$

4. Etudier les variations de la fonction f.

5. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à $0,95$. En utilisant les résultats des deux questions précédentes, à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

En juillet 2014, l'institut de veille sanitaire d'une île, en s'appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 15% de la population est atteinte par le virus.

Comme certaines personnes ne consultent pas forcément leur médecin, on pense que la proportion est en réalité plus importante. Pour s'en assurer, on se propose d'étudier un échantillon de 1000 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus.

1. Sous l'hypothèse $p = 0,15$, déterminer la loi de X.

4.2 Loi exponentielle

Certaines variables aléatoires ne sont pas à valeurs discrètes mais peuvent prendre n'importe quel nombre réel. On parle de variable aléatoire continue. Le calcul des probabilités d'évènements se fait alors au travers de calcul d'intégrales. Voici quelques exercices présentant la notion de loi exponentielle.

Exercice 8. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $\mathbb{P}(T \leq a) = \int_0^a \lambda e{-}\lambda x dx$. De plus $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(T > a) = e^{-\lambda a}$.

2. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a
$$\mathbb{P}(T > t + a | T > t) = \mathbb{P}(T > a).$$
Une telle variable aléatoire est dite “sans mémoire”.

Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ inconnu. De manière empirique, on a calculé que les ampoules ne fonctionne plus au bout de 10000 heures.

1. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(T > 5000)$.

3. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12000 heures.