Chapitre 10

Produit scalaire, applications géométrique

10.1 Introduction

Bien qu'important en géométrie euclidienne, la notion de produit scalaire apparaît tardivement. Les premières traces de ceci apparaissent dans des travaux, liées à la création de l'ensemble des quaternions, de Hamilton en 1843. Le mathématicien Peano, quant-à lui, le définit à partir d'un calcul d'aire ou de déterminant. Ce ne fut que plus tard encore que les qualités intrinsèques (forme bilinéaire symétrique définie positive) d'un produit scalaire furent identifiées et utilisées comme définition. L'avantage de cette formulation abstraite permet de transposer des résultats géométriques à des espaces abstraits, parfois de dimension infinie (espace de fonction par exemple).

10.2 Définition et expressions d'un produit scalaire

10.2.1 Norme d'un vecteur

Définition 10.2.1. *Si $\overrightarrow{u}$ est obtenu à partir de deux points A et B (i.e. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$) alors la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ correspond à la longueur AB. Ceci se note*

$$\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$$

Lorsque $\|\overrightarrow{u}\| = 1$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est dit unitaire.

Remarque.

1. L'égalité $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$ équivaut à $A = B$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout vecteur $\overrightarrow{u}$ nous avons $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\|$. Par exemple,

$$\|3\overrightarrow{u}\| = 3\|\overrightarrow{u}\| \quad \text{et} \quad \|-2\overrightarrow{u}\| = 2\|\overrightarrow{u}\|$$

3. Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ alors

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

10.2.2 Définition d'un produit scalaire

A partir de la norme précédente, il est possible de définir un produit scalaire dans le plan : il s'agit d'associer un nombre réel à deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ données.

Définition 10.2.2. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, le produit scalaire entre ces deux vecteurs est défini par*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Remarque. 1. Attention $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est un nombre réel pas un vecteur.

2. Par convention, lorsque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, il est possible d'écrire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2$. Il est toutefois préférable de noter $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$ pour éviter les confusions.

3. La définition du produit scalaire montre que si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

4. Soit $ABCD$ est un parallélogramme, notons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ (ainsi $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$) alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(AD^2 - AB^2 - AC^2\right)$$

10.3 Expression du produit scalaire

Dans certains contextes, il est possible d'obtenir des expressions plus manipulables du produit scalaire.

10.3.1 A l'aide des coordonnées

Proposition 32. *Dans un repère orthonormée, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ alors*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Remarque. 1. En particulier, $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2$.

2. Si $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ est une base orthonormée $\big($i.e. $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{j} = (0, 1)\big)$ et $\overrightarrow{u} = (x, y)$ un vecteur quelconque, alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i} = x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{j} = y.$$

Autrement dit, le produit scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ avec les vecteurs composant une base du plan permet de retrouver les coordonnées de celui-ci.

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition en observant, dans un premier temps, que $\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + x^2$ et $\|\overrightarrow{v}\|^2 = (x')^2 + (y')^2$. Puis, dans un second temps, que le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$ et par conséquent

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + (x')^2 + 2xx' + y^2 + (y')^2 + 2yy'$$

Il suffit ensuite, en utilisant la définition de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, de calculer $\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$ pour conclure. □

10.3.2 A l'aide de la norme et d'un angle orienté

Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, il est possible d'exprimer le produit scalaire en fonction de l'angle orientés $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Proposition 33. *Sous les hypothèses précédentes,* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Remarque. Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, l'expression précédente se simplifie :

- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.

- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposé alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

Démonstration. Sans perdre en généralité (quitte à remplacer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par $\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ et $\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$), il est possible de supposer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient unitaires (i.e. $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$). Plaçons nous dans un repère orthornormée direct de la forme $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{j})$ et posons $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{u}$ ainsi que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}$.

Il suffit donc de calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$ dans le repère orthonormée $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{j})$. Pour cela, nous allons utiliser le théorème précédent. Il nous suffit donc de déterminer les coordonnées de ces vecteurs pour ensuite utiliser l'expression du produit scalaire en fonction des coordonnées. Tout d'abord, puisque $\overrightarrow{OA}$ est l'un des vecteurs de base du repère, nous avons

$$\overrightarrow{OA} = (1, 0)$$

Ensuite, par définition des angles orientés $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ nous avons

$$\overrightarrow{OM} = \big(\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\,;\, \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\big) = \big(\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\,;\, \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\big)$$

puisque $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}$. Ainsi, d'après le théorème précédent

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + 0 \times \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Ce qui est le résultat souhaité. □

10.4 Règles de calculs

Etant donnés trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ voici quelques règles de calculs permettant de manipuler plus facilement les produits scalaires entre ces derniers.

Proposition 34. *Pour tous vecteurs* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *et tous nombres réels* a *et* b*, nous avons*

1. *propriété de symétrie :* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

2. *propriété de linéarité :*

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \quad \textit{et} \quad (a\overrightarrow{u}) \cdot (b\overrightarrow{v}) = (ab) \times \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

Remarque. En particulier, nous avons les conséquences suivantes :

$$(-\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 \pm 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

Attention, nous rappelons que $\overrightarrow{u}^2$ est une notation pour désigner $\|\overrightarrow{u}\|^2$. Autrement dit, la deuxième conséquence signifie que la norme (au carré) du vecteur $\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}$ s'exprime comme la somme des normes (au carré) des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ plus ou moins le produit scalaire entre ces deux vecteurs.

10.5 Produit scalaire et orthogonalité

Géométriquement le produit scalaire à un lien avec la notion d'orthogonalité.

Définition 10.5.1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ; supposons de plus que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que les droite (AB) et (CD) sont perpendiculaires.*

Remarque. Par convention $\vec{0}$ est orthogonal à tout autre vecteur

Proposition 35 (Orthogonalité et produit scalaire)**.** *Nous avons l'équivalence suivante :*

$$(AB) \perp (CD) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

Démonstration. Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{CD} = \vec{0}$ le résultat est immédiat. Dans le cas contraire, nous avons

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}).$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont non nuls, il en est de même des normes associées. Ainsi, l'hypothèse $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ entraine que

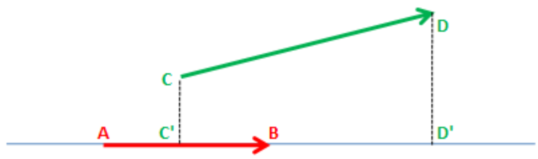
$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

Ceci implique alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. □

Le procédé de projection orthogonal que nous allons décrire ci-dessus permet de simplifier le calcul d'un produit scalaire entre deux vecteurs.

Définition 10.5.2. *Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan. Dire que les points C' et D' sont les projections orthogonales des points C et D sur la droite (AB) signifie que*

$$(CC') \perp (AB) \quad \text{et} \quad (DD') \perp (AB).$$



Théorème 36 (Projeté orthogonal)**.** *Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls. Dans ce cas nous avons*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

où C' et D' sont les projections orthogonales des points C et D sur la droite (AB).

Remarque. En résumé, pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ il est possible de remplacer l'un des deux vecteurs par son projeté orthogonal (sur la droite dirigée par le second vecteur).

Démonstration. La démonstration repose sur la décomposition, grâce à la relation de Chasles, suivante :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}$$

qu'il faut combiner avec les règles de calculs de produit scalaire. □

10.6 Applications

Voici deux applications géométriques reposant sur une utilisation du produit scalaire.

10.6.1 Théorème d'Al-Kashi

Il s'agit d'une « généralisation » du théorème de Pythagore. Dans ce qui suit ABC désigne un triangle scalène (quelconque). Selon l'usage, nous posons

$$BC = a, \quad AC = b \quad \text{et} \quad AB = c.$$

Les angles de sommets respectis A, B et C sont notés $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

Théorème 37 (Al-Kashi)**.** *Soit ABC un triangle scalène alors*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$$

Remarque. En particulier, si ABC est un triangle rectangle en A nous retrouvons l'égalité entre les carrés des longueurs du Théorème de Pythagore. Il est également possible d'échanger le rôle des longueurs a, b et c afin d'obtenir

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{b}) \quad \text{ou} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{c})$$

Ce théorème est notamment utile pour déterminer les mesures des angles $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$ lorsque les longueurs a, b et c sont connues.

Démonstration. D'après la relation de Chasles, nous avons

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

C'est pourquoi, $b^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$. Or, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AC \times \cos(\widehat{A})$ d'où le résultat. □

10.6.2 Théorème de la médiane

Rappelons que la médiane d'un triangle est une droite qui passe pas l'un des sommets de celui-ci et coupe en son milieu le côté opposé.

Théorème 38 (Théorème de la médiane)**.** *Soient ABC un triangle et $I = m[BC]$ alors*

$$b^2 + c^2 = 2AI^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Démonstration. D'après la relation de Chasles, nous avons

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}$$

Donc $b^2 + c^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2 = AI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + AI^2 + IB^2 - 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB}$. Ainsi

$$b^2 + c^2 = 2AI^2 + 2IB^2$$

or $IB = \frac{a}{2}$, d'où le résultat. □