Chapitre 13

Equation cartésienne de droites et de cercles

13.1 Droite et produit scalaire

13.1.1 Vecteur normal à une droite

Définition 13.1.1. *Dire qu'un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est normal à une droite d signifie que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de d.*

Remarque. En conséquence de ceci, nous avons les faits suivants :

1. étant donnés, quatre points distincts du plan,

$$(AB) \perp (CD) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

2. Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à d et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de d, nous avons

   - $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de toute droite d' perpendiculaire à d.

   - $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à toute droite d' perpendiculaire à d

3. Soient d et d' deux droites ayant respectivement $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ pour vecteurs normaux, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ pour vecteurs directeurs :

$$d \perp d' \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{n} \text{ et } \overrightarrow{u'} \text{ sont colinéaires}$$

13.1.2 Vecteur normal et équation de droite

Dans un repère orthonormé, il est possible de retrouver des équations cartésiennes de droites à l'aide d'un vecteur normal.

Proposition 44. *Une droite d a pour une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) si et seulement si $\overrightarrow{n} = (a, b)$ est un vecteur normal à d.*

Remarque. En conséquence de ceci nous avons le fait suivant. Soient d et d' d'équations cartésiennes respectives :

$$d \,:\, ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c' = 0$$

Nous avons alors l'équivalence suivante : $d \perp d' \iff aa' + bb' = 0$.

13.2 Cercle et produit scalaire

Dans ce qui suit, nous nous nous plaçons dans un repère orthonormée $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

13.2.1 Equation d'un cercle défini par son centre et son rayon

Définition 13.2.1. *L'équation cartésienne d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(x_0; y_0)$ et de rayon r est*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Remarque. Observons qu'il s'agit simplement d'une reformulation de $M(x; y)$ est un point du cercle $\mathcal{C}$ équivaut à $IM^2 = r^2$.

Exemple 13.2.1. L'équation $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 12$ est celle d'un cercle de centre $I(-1; 2)$ et de rayon $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

13.2.2 Equation d'un cercle défini par son diamètre

Il est également possible de définir un cercle à partir de l'un de ses diamètres $[AB]$.

Proposition 45. *M est un point du cercle $\mathcal{C}$ équivaut à $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.*

Remarque. Ce résultat permet d'obtenir l'équation d'un cercle à partir de deux de ses points, diamétralement opposés, A et B.

Exemple 13.2.2. Soient $A(1; 1)$ et $B(-2; 3)$ sont les extrémités d'un diamètre d'un cercle $\mathcal{C}$ et déterminons une équation de celui-ci. Soit $M(x; y) \in \mathcal{C}$, d'après le résultat précédent il suffit de calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$. Ici, nous avons

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (1 - x)(-2 - x) + (1 - y)(3 - y) = x^2 + y^2 + x - 3y + 4$$

D'où, l'équation de $\mathcal{C}$ est : $x^2 + y^2 + x - 4y + 1 = 0$. Il est important de vérifier au moins une fois qu'il s'agit bien d'une équation de cercle :

$$x^2 + y^2 + x - 4y + 1 = 0 \quad \iff \quad (x + \frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 - \frac{13}{4} = 0$$

Il s'agit bien de l'équation d'un cercle de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$ et de centre $C(-\frac{1}{2}; 2)$.

Remarque. Tout cercle admet une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ mais la réciproque est fausse.