Chapitre 2

Equations algébriques

2.1 Introduction

2.2 Expressions algébriques

2.2.1 Forme factorisée et developpée

Lorsque nous aurons à traiter une expression algébrique, celle-ci pourra se trouver sous forme factorisée (produit ou quotient de facteurs) ou bien sous forme développée (somme de termes). Voyons plutôt sur deux exemples.

Exemple 2.2.1.

1. La fonction $f(x) = x^2 - 2x - 3$ se trouve sous forme développée, sa forme factorisée est $f(x) = (x+1)(x-3)$.

2. La fonction $g(x) = 4 - \frac{3}{2x+3}$, $x \neq -\frac{3}{2}$ se trouve sous forme développée. Sa forme factorisée est $g(x) = \frac{8x+9}{2x+3}$, $x \neq -\frac{3}{3}$.

Remarque.

1. La fonction g, sous forme factorisée, fait partie de la famille des fractions rationnelles.

2. Suivant le problème à résoudre, il faudra être à même de déterminer la forme la mieux adaptée.

2.2.2 Développement

Pour passer d'une forme factorisée à une forme développée, il suffit de développer l'expression et d'effectuer les éventuelles simplifications.

Exemple 2.2.2.

$$\begin{aligned}
(2x+1)(-x+3)-2(5x+7) &= 2x \times (-x) + 2x \times 3 + 1 \times (-x) + 1 \times 3 + (-2) \times 5x + (-2) \times 7 \\
&= -2x^2 + 6x - x + 3 - 10x - 14 \\
&= -2x^2 - 5x - 11
\end{aligned}$$

Au début des calculs précédents, nous avons donc distribué le terme $2x$ dans la deuxième parenthèse. Ceci nous a donné les termes $2x \times (-x) + 2x \times 3$. Puis nous avons procédé de manière similaire en distribuant 1 dans la deuxième parenthèse et obtenu $1 \times (-x) + 1 \times 3$. Enfin, nous avons effectué des calculs semblables pour développer $-2(5x + 7)$.

Pour gagner du temps lors de certains développements, il sera essentiel de connaître, sur le bout des doigts, les identités remarquables suivantes.

Proposition 5. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, les identités suivantes sont satisfaites.*

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \textit{et} \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Remarque. Notons que, dans chacune des égalités précédentes, le membre de droite correspond à la partie développée tandis que le membre de gauche correspond à la partie factorisée.

Démonstration. Démontrons la première égalité. Pour cela, il suffit d'observer que $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$. Ensuite, il suffit de distribuer les termes de la premières parenthèses dans la deuxième. Nous obtenons donc $a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + 2ab + b^2$ puisque $ab = ba$. Il est aisée de reproduire cette démonstration lorsque nous souhaitons traiter $(a - b)^2$ et le même procédé (de distribution) permet d'obtenir la dernière identité remarquable. $\square$

A titre d'illustration, voici un exemple d'application de telles formules.

Exemple 2.2.3.

1. $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$, ici nous utilisons l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$.

2. $(2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 - 1$, ici nous utilisons l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 1$.

2.2.3 Factorisation

En classe de seconde, plusieurs outils sont à notre disposition pour factoriser une expression algébrique. Observons ces différentes méthodes par le biais d'exemples. Par la suite, ces méthodes seront essentielles pour résoudre des équations algébriques.

Exemple 2.2.4. ***Chercher un facteur commun*** :

$$\begin{aligned}
(-x + 2)(3x + 1) - 2(-x + 2)(x + 4) &= (-x + 2)\big[(2x + 1) - 2(x + 4)\big] \\
&= (-x + 2)(3x + 1 - 2x - 8) \\
&= (-x + 2)(x - 7).
\end{aligned}$$

Si les identités remarquables sont utilisées pour développer une expression, elles sont aussi utiles pour obtenir une factorisation. Pour cela, il suffit de les lire « dans l'autre sens ».

Exemple 2.2.5. En utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, nous pouvons factoriser l'expression suivante :

$$9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x+4)(3x-4)$$

Enfin, pour obtenir une fraction rationnelle à partir d'une somme de quotient, il suffit de déterminer un dénominateur commun.

Exemple 2.2.6.

$$\begin{aligned} \frac{2}{-x+3} - \frac{3}{2x+1} &= \frac{2(2x+1)}{(-x+3)(2x+1)} - \frac{3(-x+3)}{(2x+1)(-x+3)} \\ &= \frac{4x+2+3x-9}{(-x+3)(2x+1)} \\ &= \frac{7x-7}{(-x+3)(2x+1)} = \frac{7(x-1)}{(-x+3)(2x+1)} \end{aligned}$$

2.3 Résolution d'équation

Dans ce qui suit, nous allons résoudre des équations de la forme

$$f(x) = k \tag{2.3.1}$$

où f est une fonction donnée et k un nombre réel connu.

Définition 2.3.1. *Résoudre l'équation (2.3.1) dans un ensemble de nombre réels $I \subset \mathbb{R}$ revient à déterminer tout les élements appartenant à I pour lesquels l'égalité (2.3.1) est vérifiée.*

Exemple 2.3.1.

1. 2 n'est pas solution de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ car $2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1 \neq 0$.

2. 3 est une solution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ puisque $3^2 - 4 \times 3 + 3 = 0$.

Remarque. Une équation peut avoir une unique solution, plusieurs solutions ou aucune solution.

2.3.1 Résolution algébrique

Nous allons voir qu'il est possible de résoudre une équation par le calcul. Il est fondamental de comprendre comment traiter une équation de degré un (ceci signifie que l'équation (2.3.1) n'implique que des constantes ainsi qu'une inconnue x sans que celle-ci soit élevée à une quelconque puissance).

Equation de dégré un

Pour résoudre une équation de degré un, il faut et il suffit d'isoler x dans un membre de l'égalité. Pour cela, il est possible d'utiliser les opérations élémentaires d'addition, de soustraction, de division, de multiplication, sur chacun des membres de l'équation pour arriver à nos fins.

Exemple 2.3.2. Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'équation $3x + 3 = 5x - 7$.

$$3x + 3 = 5x - 7 \iff 3x - 5x + 3 = 5x - 5x - 7 \iff -2x + 3 = -7$$

Poursuivons nos calculs

$$-2x + 3 - 3 = -7 - 3 \iff -2x = -10 \iff \frac{-2x}{-2} = \frac{-10}{-2}$$

Pour enfin conclure que $x = \frac{-10}{-2} = 5$, nous indiquerons ensuite que l'ensemble des solutions S vaut $S = \{5\}$ signifiant que l'unique solution à l'équation est le nombre réels $x = 5$.

Se ramener à une forme factorisée

Comme souvent en mathématiques, nous chercherons à transformer un problème compliqué en un autre, plus simple que nous savons résoudre. Concernant les équations algébriques, cela reviendra à ***factoriser*** notre expression algébrique pour obtenir un produit ou un quotient. Nous utiliserons ensuite, les propriétés suivantes qui ramènerons notre problème à la résolution d'une équation de degré un.

Propriétés 1.

1. **Produit nul** : $A \times B = 0$ est équivalent à $A = 0$ ou $B = 0$.
2. **Quotient nul** :$\frac{A}{B} = 0$ est équivalent à $A = 0$ et $B \neq 0$.
3. Enfin, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ si et seulement si $A \times D = B \times C$ avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$.

Voici deux exemples illustrant les propriétés précédentes.

Exemple 2.3.3. Cherchons à résoudre l'équation : $(2x + 1)(x + 3) = (2x + 1)(-2x + 2)$. Tout d'abord, plaçons tous les termes dans le même membre afin de chercher une factorisation.

$$\begin{aligned} (2x \quad + \quad & 1)(x + 3) = (2x + 1)(-2x + 2) \\ \iff \quad & (2x + 1)(x + 3) - (2x + 1)(-2x + 2) = 0 \\ \iff \quad & (2x + 1)(x + 3 + 2x - 2) = 0 \\ \iff \quad & (2x + 1)(3x + 1) = 0 \end{aligned}$$

Nous nous sommes ramenés à une forme du type $A \times B = 0$. Ainsi, d'après le point 1 des Propriétés 1 précédentes, nous avons donc

$$2x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x + 1 = 0$$

En d'autres termes

$$(2x1 + 1)(x + 3) = (2x + 1)(-2x + 2) \iff x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{3}$$

et l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}$, s'écrit $S = \left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right\}$.

Remarque. ***Mise en garde*** : il n'est pas correct de simplifier directement l'équation $(2x+1)(x+3) = (2x + 1)(-2x + 2)$ par $2x + 1$ (apparaissant dans les deux membres) puisque cette quantité peut être nulle ! Cela reviendrait à diviser une quantité par 0 ce qui est interdit !

Voyons un exemple supplémentaire concernant un quotient.

Exemple 2.3.4. Tâchons de résoudre l'équation $\frac{2x+1}{x-2} = 3$ lorsque $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Observons qu'il est important d'exclure les réels annulant le dénominateur. Ici, cela signifie qu'il exclure les réels tels que $x - 2 = 0$, i.e. $x = 2$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x-2} = 3 \qquad &\iff \qquad \frac{2x+1}{x-2} = \frac{3}{1} \\
&\iff \qquad (2x+1) \times 1 = 3 \times (x-2) \\
&\iff \qquad 2x + 1 = 3x - 6 \\
&\iff \qquad x = 7
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équations, dans $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ est donc $S = \{7\}$.

2.4 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Développer des expressions polynomiales simples.
- Mettre un problème en équation.
- Résoudre une équation (en utilisant les règles de produit ou quotient nul).
- Factoriser une expression algébrique.
- Utiliser les identités remarquables.