Chapitre 4

Equation cartésienne d'une droite et vecteur directeur

Dans ce chapitre nous poursuivons notre étude du calcul vectoriel. A nouveau, dans ce qui suit, nous munirons le plan d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, les coordonnées des points que nous allons considérer par la suite seront exprimées dans ce repère.

4.1 Rappels

Voici de brefs rappels concernant les droites dans le plan.

Proposition 15. *Soit (d) une droite du plan.*

- *Si (d) n'est pas parallèle à l'axe (Oy) alors (d) a une équation de la forme $y = mx + p$ où $m \in \mathbb{R}$ est le coefficient directeur de la droite et $p \in \mathbb{R}$ est l'ordonnée à l'origine.*

- *Si (d) est parallèle à l'axe (Oy) alors (d) a une équation de la forme $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.*

Les deux représentations précédentes sont appelées équations réduites de droites*.*

Remarque. Notons que le premier cas de figure correspond à la représentation graphique de polynôme de degré (i.e. $f(x) = mx + b$).

Il est assez simple de déterminer le paramètre p, pour cela il suffit de déterminer la valeur de l'ordonnée du point d'abscisse 0 appartenant à la droite (d). Pour déterminer le coefficient m, il suffit de considérer deux points $A(x_A; y_a) \in (d)$ et $B(x_b; y_b) \in (d)$ et d'évaluer le rapport $\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$. En effet, ce taux d'accroissement donne la valeur du paramètre m.

Enfin, deux droites sont parallèles si elles admettent le même coefficient directeur.

4.2 Equation cartésienne d'une droite

Définition 4.2.1. *Toute équation de la forme (E) : $\quad ax + by + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, est appelée équation cartésienne.*

Comme nous allons le voir, les équations cartésiennes englobent les deux cas de figures de la Proposition 15.

Proposition 16. *A toute droite (d) il est possible d'associer une équation cartésienne où le couple $(a, b) \neq (0, 0)$ et réciproquement.*

Démonstration. 1. Considérons une équation cartésienne (E) pour laquelle $(a, b) \neq (0, 0)$.

- Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et l'équation (E) s'écrit $x = -\frac{c}{a}$ ce qui correspond bien à une équation de droite de la forme $x = k$ avec $k = -\frac{c}{a} \in \mathbb{R}$.

- Si $b \neq 0$, alors l'équation (E) s'écrit $y = \frac{1}{b}(-ax - c) = -\frac{a}{b} - \frac{c}{b}$ ce qui correspond à une équation de droite de la forme $y = mx + p$ avec $m = -\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ et $p = -\frac{c}{b} \in \mathbb{R}$.

2. Réciproquement, considérons une droite (d) du plan. D'après la Proposition 15 (rappels de seconde), deux cas de figures s'offrent à nous.
   - Si (d) a pour équation $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, alors elle admet pour équation cartésienne $x - k = 0$ correspondant aux paramètres $(a, b, c) = (1, 0, -k)$.

   - Si (d) a pour équation $y = mx+p$, $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, alors elle admet pour équation cartésienne $-mx + y - p = 0$ ce qui correspond au triplet $(a, b, c) = (-m, 1, -p)$.

□

Remarque. Une droite (d) peut admettre plusieurs représentations cartésiennes.

4.3 Vecteur directeur

Le lien entre droites et calcul vectoriel s'effectue via la notion de vecteur directeur.

Définition 4.3.1. *Un vecteur directeur d'une droite (d) est un vecteur dont la direction est parallèle à celle de (d).*

Remarque. En particulier, pour tout couple (A, B) de points appartenant à la droite (d), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette même droite. Aussi, si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d) alors $k\overrightarrow{u}$ avec $k \in \mathbb{R}_*$ l'est également.

Voyons à présent de quelle manière il est possible d'obtenir un vecteur directeur à partir d'une équation cartésienne de droite.

Proposition 17. *Soit (d) une droite du plan.*

- *Si (d) a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, alors $\overrightarrow{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (d).*

- *Si (d) a pour équation $y = mx + p$, avec $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, alors $\overrightarrow{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de (d).*

- *Si (d) a pour équation $x = k$, alors $\overrightarrow{u}(0; 1)$ est un vecteur directeur de (d).*

Démonstration. Traitons le premier cas de figure. Soit (d) une droite admettant pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ ainsi que $A(x_a; y_a) \in (d)$ et $M(x; y) \in (d)$ deux points de cette droite. Le vecteur $\overrightarrow{AM}(x - x_a; y - y_a)$ est un vecteur directeur de la droite (d). Vérifions que ce vecteur est bien colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u} = (-b; a)$. Pour cela calculons le déterminant entre $\overrightarrow{u}$ $\overrightarrow{AM}$ et utilisons le fait que les coordonnées des points M et A satisfont l'équation cartésienne de (d).

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = (x - x_a) \times a - (y - y_a) \times (-b) = ax + by - ax_a - b_y a = c - c = 0$$

Donc les vecteurs sont bien colinéaire et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d). □

La proposition suivante nous affirme qu'une droite (d) peut être caractérisée par la donnée d'un point $A \in (d)$ et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Proposition 18. *Soient (d) une droite, $A \in (d)$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de cette droite. Nous avons la caractérisation suivante des points M appartenant à la droite (d).*

$$M \in (d) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{u} \quad \textit{et} \quad \overrightarrow{AM} \quad \textit{sont colinéaires.}$$

Enfin, voici une condition de parallélisme entre deux droites à partir de leurs vecteurs directeurs.

Proposition 19 (Condition de parallèlisme)**.** *Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.*

Remarque. Cette condition peut se vérifier à l'aide du déterminant.

Pour conclure ce chapitre, traitons un dernier exemple

Exemple 4.3.1. Dans un repère, déterminons une équation cartésienne des droites suivantes :

1. (d) passant par le point $A(-1; 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(3; 2)$.

2. (d') passant par les points $B(2; 3)$ et $C(-3; 5)$.

Présentons deux manières de répondre à la première question.

1. Puisque $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d), cela signifie que cette droite admet une équation cartésienne de la forme $(E) : \quad 2x - 3y + c = 0$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. De plus, le point $A \in (d)$ dont ses coordonnées vérifient l'équation (E). Autrement dit, $2 \times (-1) - 3 \times (-3) + c = 0$ d'où $c = 5$.

2. Considérons un point générique $M(x; y) \in (d)$. Nous savons alors que le vecteur $\overrightarrow{AM}(x+1; y-1)$ est colinéaire au vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Ainsi, leur déterminant est nul :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2(x+1) - 3(y-1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - 3y + 5 = 0$$

Traitons à présent la deuxième question. Puisque B et C appartiennent à la droite (d'), $\overrightarrow{BC}(-5, 2)$ est un vecteur directeur de (d'). C'est pourquoi (d') admet pour équation cartésienne

$$(E') : \quad 2x + 5y + c = 0 \quad c \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la valeur de c, il suffit d'utiliser le fait que les coordonnées du point B (ou C) vérifie l'équation (E'). Nous obtenons ainsi $c = -19$.

4.4 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Utiliser la notion de vecteur directeur et de colinéarité pour déterminer des équations cartésiennes de droites.
- Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un vecteur directeur et un point de cette droite.

- Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie par une équation cartésienne.