Chapitre 5

Généralités sur les fonctions

5.1 Nombres réels et intervalles

Faisons une rapide mise au point sur différents ensembles de nombre que nous allons utilisé tout au long de l'année.

5.1.1 Les réels

L'ensemble des réels est celui que nous allons le plus rencontrer. Celui-ci se note $\mathbb{R}$ et peut se représenter à l'aide d'une droite graduée. Chaque nombre réel correspond à un point de cette droite et, réciproquement, chaque point de la droite correspond à un nombre réel appelé abscisse de ce point. Pour signifier qu'un nombre x appartienne à cet ensemble nous noterons ceci par $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 5.1.1. $100 \in \mathbb{R}$; $-\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$; $\pi \in \mathbb{R}$; $4,56743 \in \mathbb{R}$ etc...

5.1.2 les entiers

Parmi les réels, il y a un ensemble plus petit correspondant aux entiers :

1. l'ensemble des entiers positifs ou nuls, appelés *entiers naturels*, se note $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\} \quad \text{par exemple} \quad 17 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad -45 \notin \mathbb{N}$$

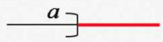
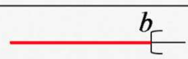
2. l'ensemble des nombres entiers, appelés entiers relatifs, se note $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -12; \ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots 25; 26; \ldots\} \quad \text{par exemple} \quad -34 \in \mathbb{Z},\ 11 \in \mathbb{Z},\ \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \pi \notin \mathbb{Z}$$

5.1.3 Les intervalles

Lorsque nous étudierons des fonctions, nous aurons à considérer des sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$ appelés *intervalles*. Il peut s'agir de segment, de demi-droite ou encore de la droite des réels toute entière. Un point important est que ces ensembles n'ont pas de « trous » et sont d'un seul « tenant ».

L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels x tels que :	Représentation (en rouge) :
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	

L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels x tels que :	Représentation (en rouge) :
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	

5.2 Notion de fonction

Considérons un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement un intervalle). Définir une fonction sur l'ensemble I revient à fournir une formule précisant les calculs à effectuer à partir d'un nombre $x \in I$. Comme nous le verrons, la calculatrice est un outil très pratique pour étudier des fonctions.

Un peu comme une recette de cuisine, il faut suivre les étapes dans l'ordre pour arriver au résultat.

Définition 5.2.1. *Une fonction f est définie sur l'ensemble I lorsque à tout point $x \in I$ nous associons un* unique *nombre noté $f(x)$. Nous emploierons fréquemment la notation $f : x \mapsto f(x)$.*

Remarque (Vocabulaire).

1. L'ensemble des réels I pour lesquels il est possible de déterminer $f(x)$ est appelée l'ensemble de définition de f.
2. $f(x)$ est appelée l'image de x par la fonction f.

3. Si pour un nombre réel donné y, il est possible de trouver un autre réel x tel que $y = f(x)$ nous dirons que x est l'antécédent de y par f.

Voici quelques exemples pour illustrer cette définition afin de la rendre plus concrète.

Exemple 5.2.1. 1. Il est possible de définir la fonction qui à un nombre lui associe le double de sa valeur. C'est-à-dire, $f : x \mapsto 2x$. Pour ce choix de fonction, l'image du point $x = 2$ vaut $f(2) = 2 \times 2 = 4$. Tout nombre réel admet un antécédent par la fonction f, par exemple $y = 17$ admet pour antécédent $\frac{17}{2}$ car $f\left(\frac{17}{2}\right) = 2 \times \frac{17}{2} = 17$.

2. Il est aussi possible de définir la fonction carrée qui à tout nombre associe son carré. C'est-à-dire : $f : x \mapsto x^2$. Observons que les nombres négatifs n'admettent pas d'antécédent. En effet, si $y = -1$ il n'est pas possible de trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^2 = -1$ car $x^2 \geq 0$ et $-1 < 0$.

3. Bien entendu, il est possible de regarder des fonctions beaucoup plus compliquées en précisant les opérations que doit subir un nombre réel x pour obtenir la valeur de $f(x)$.

$$f(x) = x^2 - 3x + 12 \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{6x-1}{x+1},\ x \neq -1 \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{3x^2 - (x+2)(x^3 - \pi)}{x^2+1} \ldots$$

Ces fonctions existent mais nous ne les étudierons que plus tard dans l'année.

5.3 Représentation graphique

Une manière de visualiser ces fonctions est d'utiliser une représentation graphique. Cela nous permettra, notamment, de résoudre certains problèmes ou certaines équations à partir d'un graphique.

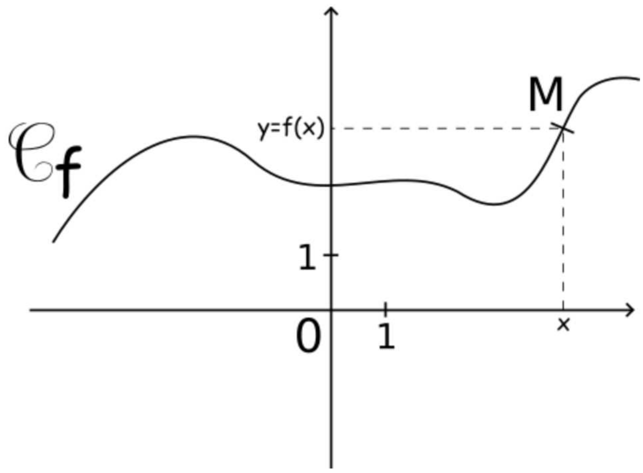
Définition 5.3.1. *Soient $(0; I; J)$ un repère du plan et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ avec $x \in I$ et $y = f(x)$.*

Remarque. L'axe des abscisses permet de trouver les antécédents d'un point y tandis que l'axe des ordonnées permet de trouver l'image d'un point x.

Ces manipulations doivent êtres sues : en cas de doute, aller voir les tutoriels d'Y. Monka sur le site maths et tiques.

1. Sur la calculatrice, il suffit d'utiliser la touche $f(x)$ pour entrer la formule $y_1 = f(x)$ définissant la fonction puis d'appuyer sur la touche *graphique* pour obtenir une figure.

2. Attention, il faut parfois ajuster la fenêtre de visualisation pour voir la courbe en entière. Pour cela, il faut cliquer sur la touche $fen\hat{e}tre$ pour ensuite modifier les abscisses avec $Xmin$ et $Xmax$; ainsi que les ordonnées avec $Ymin$ et $Ymax$.



3. $Xgrad$ et $Ygrad$ permettent de définir la taille des graduations sur les axes des abscisses et des ordonnées.

4. La touche *zoom* peut également être utile pour choisir judicieusement la fenêtre de visualisation du graphique.

Il est important de savoir utiliser ce graphique pour trouver l'image d'un point, déterminer des antécédents, l'ensemble de définition.

5.3.1 Méthode graphique pour résoudre une équation

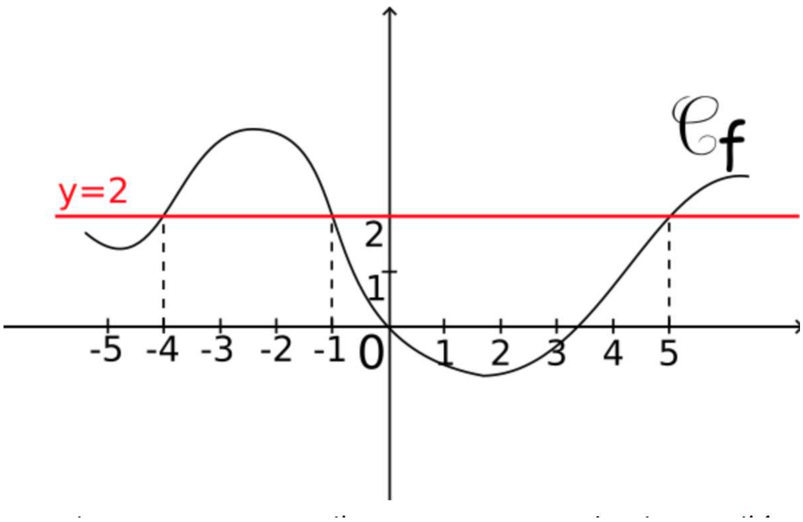
La représentation graphique d'une fonction f permet d'obtenir une nouvelle méthode pour résoudre des équations de la forme $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Pour cela, il convient de tracer la courbe $y = f(x)$ sur $\mathbb{R}$ ainsi que la droite d'équation $y = k$ afin de déterminer l'ensemble S des éventuels points d'intersections de ces deux courbes.

Remarque. Si jamais la droite $y = k$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ ne se coupe pas, l'ensemble des solutions S est vide et nous noterons ceci par $S = \emptyset$. Notons également qu'une telle méthode ne vaut pas pour démonstration, elle permet seulement de guider son intuition et il est primordial d'être capable d'effectuer une résolution algébrique dans le cadre du programme.

La calculatrice est de nouveau utile pour résoudre, de manière approximative, ce genre d'équation. Pour cela, il suffit :

1. d'aller dans l'onglet $f(x)$ de la calculatrice pour définir $y_1 = f(x)$ et $y_2 = k$.

2. cliquer sur la touche *graphe*



3. cliquer ensuite sur le bouton *trace* et sélectionner la valeur *intersection*.

Nous faisons la même manipulation pour trouver les antécédents du point $y = 2$ par la fonction f.

5.4 Etude qualitative

Nous allons étudier certaines propriétés d'une fonction. Nous allons donc aborder la notion de monotonie et d'extremum.

5.4.1 Sens de variation

Dire qu'une fonction est croissante, sur un intervalle I, revient à dire que lorsque la valeur de x augmente dans l'intervalle I la valeur de $f(x)$ augmente également.

Définition 5.4.1. *La fonction est dite croissante sur l'intervalle I si, pour tous réels $a \leq b$ alors*

$$f(a) \leq f(b)$$

Une fonction croissante préserve l'ordre : c'est-à-dire, les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans le même ordre.

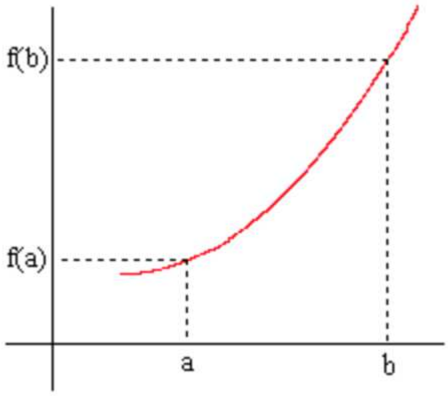
Remarque. Une fonction est dite strictement croissante si $a \leq b$ entraine que $f(a) < f(b)$.

Par exemple, si f est croissante nous aurions $2 < 3$ entraine que $f(2) < f(3)$.

Exemple 5.4.1. 1. La fonction $f(x) = 2x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $f(x) = x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Allez voir la page 20 de votre livre pour d'autres exemples



Fonction croissante sur I

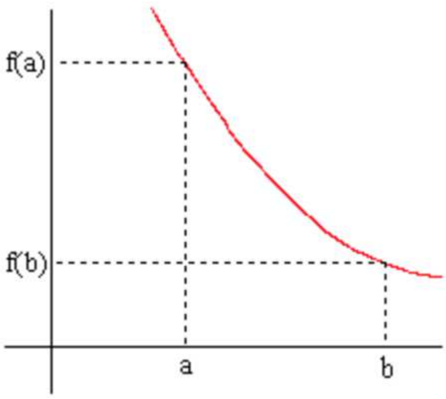
De manière analogue, une fonction est décroissante sur un intervalle I lorsque la valeur de l'image $f(x)$ diminue lorsque x augmente dans l'intervalle I.

Définition 5.4.2. *La fonction est dite décroissante sur l'intervalle I si, pour tous réels $a \leq b$ alors*

$$f(a) \geq f(b)$$

Une fonction décroissante renverse l'ordre : c'est-à-dire, les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans un ordre contraire.

Remarque. Une fonction est dite strictement croissante si $a \leq b$ entraine que $f(a) > f(b)$. Par exemple, si f est croissante nous aurions $2 < 3$ entraine que $f(2) > f(3)$.



Fonction décroissante sur I

Exemple 5.4.2. 1. La fonction $f(x) = -2x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $f(x) = x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0[$.

5.4.2 Tableau de variation

Il est commode de résumer le sens de variations d'une fonction par un tableau de variations.

Exemple 5.4.3. 1. Débutons par la fonction $x \mapsto x^2$.

x	-2		0		$+2$
$f(x) = x^2$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Ce tableau signifie que la fonction est décroissante sur l'intervalle $[-2; 0]$, puis croissante sur $[0; 2]$. Le tableau annonce aussi que $f(-2) = 4$, $f(0) = 0$ et $f(2) = 4$.

2. Voici ce que nous aurions obtenu avec la fonction $x \mapsto -2x$.

x	-3		$+2$
$f(x) = -2x$	6	$\searrow$	-4

Il est important de maîtriser les compétences exposées page 21 de votre livre : construire un tableau de variation à partir d'un graphique, comparer des images à partir d'un tableau de variation.

Nous étudierons la fonction $x \mapsto x^2$ (et ses généralisations) ainsi que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ plus précisément dans un chapitre ultérieur.

5.4.3 Extremum

Il est parfois utile de déterminer, lorsqu'elles existent, la plus grande ou la plus petite valeur atteinte par une fonction f donnée.

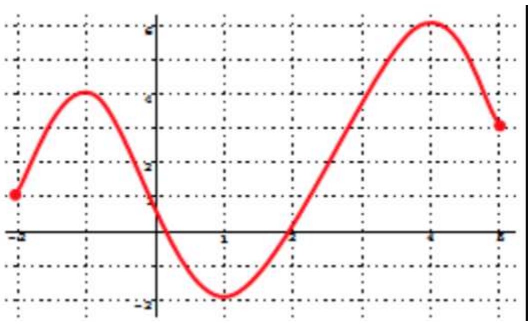
Définition 5.4.3. *1. Le maximum d'une fonction f sur un intervalle I est, s'il existe, la plus grande valeur possible des images, atteinte pour un réel $b \in I$. Ainsi, pour tout réel $x \in I$ nous avons*

$$f(x) \leq f(b).$$

2. Le minimum d'une fonction f sur un intervalle I est, s'il existe, la plus petite valeur possible des images, atteinte pour un réel $a \in I$. Ainsi, pour tout réel $x \in I$ nous avons

$$f(a) \leq f(x).$$

Remarque. Le mot extremum désigne sans distinction le minimum ou le maximum d'une fonction.



Attention à l'intervalle d'étude. Sur l'exemple ci-dessus, observons que sur $[-2;5]$ le maximum est atteint en $x = 4$ et vaut $f(4) = 6$. Tandis que sur l'intervalle $[-2;2]$, le maximum est atteint en $x = -1$ et vaut $f(-1) = 4$. Le minimum sur $[-2;6]$ est atteint en $x = 1$ et vaut $f(1) = -2$.

Remarque. La calculatrice est de nouveau utile pour déterminer, de manière approximative, les extremums. Pour cela, il suffit :

1. d'aller dans l'onglet $f(x)$ de la calculatrice pour définir $y_1 = f(x)$.

2. cliquer sur la touche *graphe*

3. cliquer ensuite sur le bouton *trace* et sélectionner la valeur *maximum* ou *minimum*.

Vous devez être capable d'utiliser la calculatrice pour déterminer les maximum/minimum d'une fonction.Les exercices corrigés de la page 23 peuvent vous aider à mieux comprendre ce que vous devez savoir faire.

5.5 Fonctions affines

Tout au long de l'année, nous allons étudié certaines fonctions très courantes. Toutes ces fonctions seront appelées fonctions de références car elles apparaitront de manière fréquente durant toute votre scolarité. Nous débutons par les plus simples d'entres elles, les fonctions linéaires et affines.

5.5.1 Fonctions linéaires

Définition 5.5.1. *Soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$ est appelée fonction linéaire. Le coefficient a est désigné sous le nom de coefficient directeur.*

Remarque.

1. Il s'agit d'une des fonctions les plus simples car l'image d'un nombre réel x est obtenue en multipliant x par a.

2. La représentation graphique, dans un repère $(O; I; J)$, d'une telle fonction est une droite qui passe l'origine O du repère.

Exemple 5.5.1. Tracer $f(x) = 1,5x$ et $g(x) = -\frac{1}{4}x$.

5.5.2 Fonctions affines et sens de variations

Il est possible de compliquer légèrement la situation à partir d'une fonction linéaire, il s'agit des fonctions affines.

Définition 5.5.2. *Etant donnés des nombres réels a et b, une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ par la formule suivante*

$$f(x) = ax + b$$

Remarque. 1. Lorsque $b = 0$ nous retrouvons le cas des fonctions linéaires. Les fonctions affines sont une généralisation des fonctions linéaires.

2. Le nombre b est souvent désigné sous le nom de « ordonnée à l'origine ». En effet, lorsque $x = 0$ une fonction affine vaut donc $f(x) = a \times 0 + b = b$. Ceci signifie que la courbe C_f d'une telle fonction passe par le point $(0, b)$. Graphiquement, lorsque $b \neq 0$, la droite représentant la courbe d'une fonction affine ne passe pas par l'origine du repère. En revanche, cette droite coupe l'axe des ordonnées au point b.

Théorème 13. *Soit $f(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$. Alors*

1. *Si $a > 0$, la fonction affine est croissante sur $\mathbb{R}$.*

2. *Si $a < 0$, la fonction affine est décroissante sur $\mathbb{R}$.*

Remarque. Graphiquement, si $a > 0$ la droite pointe vers le « haut » du repère tandis que si $a < 0$ elle pointe vers le « bas » du repère. Il est facile de caractériser les variations d'une fonction affine à partir de son coefficient directeur "a"

Démonstration. Montrons le premier point, la deuxième assertion est laissée en exercice. Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$, montrons alors que $f(x) \leq f(y)$ à condition que $a > 0$. Le point important est que la multiplication d'une inégalité par un nombre strictement positif ne change pas le sens de celle-ci ; l'ajout d'un nombre réel dans chaque membre non plus.

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad ax \leq ay \quad \Longleftrightarrow \quad ax + b \leq ay + b \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq f(y)$$

□

5.6 Bilan du chapitre

Voici les compétences à maitriser dans ce chapitre.

- Notion d'intervalle (représentation graphique, notations, inégalités).

- Vocabulaire lié aux fonctions : images, antécédents, ensemble de définition.

- Savoir lire et établire une représentation graphique d'une fonction.

- Savoir lire et établir le tableau de variations d'une fonction (notion de fonction croissante, décroissante, ...).
- Savoir déterminer les extremums d'une fonction à l'aide d'un tableau de variations ou d'une représentation graphique.
- Connaitre les représentations graphiques des fonctions affines et savoir déterminer sa monotonie en fonction du coefficient directeur.
- Utilisation de la calculatrice : tracer une fonction, tableau de valeur, déterminer les extremums, trouver les points d'intersection avec une droite.