Chapitre 7

Trigonométrie et angles orientés

7.1 Cercle trigonométrique et mesure d'angle

Définition 7.1.1. *Un cercle trigonométrique* $\mathcal{C}$ *est un cercle de rayon* 1 *sur lequel nous distinguerons deux sens de parcours :*

- *le sens direct lorsque le cercle est parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;*
- *le sens indirect lorsque le cercle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.*

Remarque. Les mesures suivantes seront utiles par la suite : la longueur d'un cercle vaut 2π, celle du demi-cercle vaut donc π et celle d'un quart de cercle vaut $\frac{\pi}{2}$.

Le cercle trigonométrique permet d'introduire une nouvelle unité de mesure d'angles : le radian.

Définition 7.1.2. *Le radian, noté* rad, *est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle* $\mathcal{C}$ *un arc de longueur* 1.

Remarque. Il y a une relation de proportionnalité entre les degrés et les radians. En effet, nous savons que la relation suivante est vérifiée

$$360 \quad \text{degrés équivaut à} \quad 2\pi\text{rad} \quad \text{(la longueur du cercle trigonométrique)}$$

C'est pourquoi nous avons le tableau suivant :

Degrés	360	d
Radian	2π	r

Ce tableau de proportionnalité nous fournit la relation suivante $180 \times r = d \times 2\pi$ qui permet de convertir des degrés en radian et vice-versa.

Les valeurs remarquables suivantes sont à connaitre

Degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

7.2 Anglé orienté d'un couple de vecteurs

Nous allons voir qu'il est possible d'orienter le plan et d'utiliser le cercle trigonométrique pour associer la mesure d'un angle entre deux vecteurs non nuls. A cet effet, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. A partir du centre O du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, il existe deux points du plan M et N tels que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{v}$$

De plus, observons que les demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ coupent le cercle en des points A et B. La longueur l, sur le cercle $\mathcal{C}$, entre les points A et B va permettre de définir la mesure de l'angle associé aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Définition 7.2.1. *Dans le contexte précédent, la famille des nombres réels $l + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*

Remarque. De manière informelle, le nombre k indique le nombre de tour (du cercle trigonométrique) qui a été fait. En pratique, nous allons souvent confondre un angle avec l'une de ses mesures. Notons aussi que l'ordre des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est important. En effet, si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = l$ alors $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = 2\pi - l$.

7.2.1 Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs

Certains mesures sont plus simples à utiliser que d'autres.

Définition 7.2.2. *Parmi les mesures $l + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, d'un angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, il en existe une et une seule appartenant à l'intervalle $I =]-\pi; \pi]$. Cette mesure s'appelle la mesure principale de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*

Remarque. La valeur absolue de la mesure principale d'un angle coïncide avec l'angle géométrique défini par les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Les autres mesures de cet angle sont obtenu en rajoutant des « tours de cercle » : si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = l$ alors toutes les autres mesures de cet angle sont de la forme $l + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Voyons ce que nous obtenons sur deux exemples.

Exemple 7.2.1.

1. Supposons que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{37}{6}\pi$ et déterminons la mesure principale de cet angle orienté. Pour cela, il suffit d'observer que

$$\frac{37\pi}{6} = \frac{6 \times 6 + 1}{6}\pi = (6 + \frac{1}{6})\pi = \frac{\pi}{6} + 3 \times 2\pi\,;$$

la mesure principale est donc $\frac{\pi}{6}$.

2. De manière similaire, si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{202\pi}{3}$ nous avons

$$\frac{202\pi}{3} = \frac{67 \times 3 + 1}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + 67\pi\,;$$

ici, il faut poursuivre un peu nos calculs afin de faire apparaitre un multiple de 2π à la place de 67π. Cela s'effectue de la manière suivante

$$67\pi = 68\pi - \pi,$$

ainsi $\frac{\pi}{3}+67\pi = \frac{\pi}{3}+68\pi-\pi = -\frac{2\pi}{3}+34\times 2\pi$. La mesure principale vaut donc $-\frac{2\pi}{3}$ et l'angle géométrique associé a pour mesure $\left|-\frac{2\pi}{3}\right| = \frac{2\pi}{3}$.

7.2.2 Propriétés des angles orientés

Voici quelques propriétés des angles orientés, celles-ci s'obtiennent grâce à du calcul vectoriel.

Proposition 23 (Colinéarité et angle orienté)**.** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors*

- *dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens est équivalent à $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0$;*
- *dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens opposé est équivalent à $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \pi$*

Remarque. Ce résultat donne une autre façon de prouver que trois points sont alignés ou de montrer que des droites sont parallèles.

Une relation de Chasles existe également pour les angles orientés.

Proposition 24 (Relation de Chasles)**.** *Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs non nuls, alors*

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})$$

Remarque. En conséquence de cette relation de Chasles, nous avons les relations suivantes :

$$(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) = -(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \quad ; \quad (\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\pi \quad ; \quad (-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\pi \quad ; \quad (-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$$

Il est également important d'observer que la substitution d'un vecteur par un autre vecteur colinéaire, de même sens, n'affecte pas le mesure de l'angle orienté. Par exemple

$$(2\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \quad ; \quad (\overrightarrow{u},3\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \quad ; \quad (2\overrightarrow{u},3\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$$

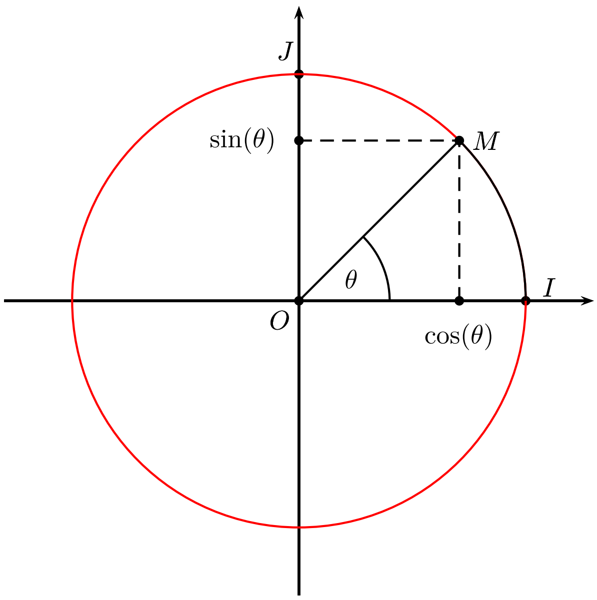
7.3 Fonction cosinus et sinus d'un angle orienté

Pour introduire ces nouvelles fonctions, il est important de se placer dans un repère orthonormé $(O;I;J)$ direct ; si $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$ ceci signifie que

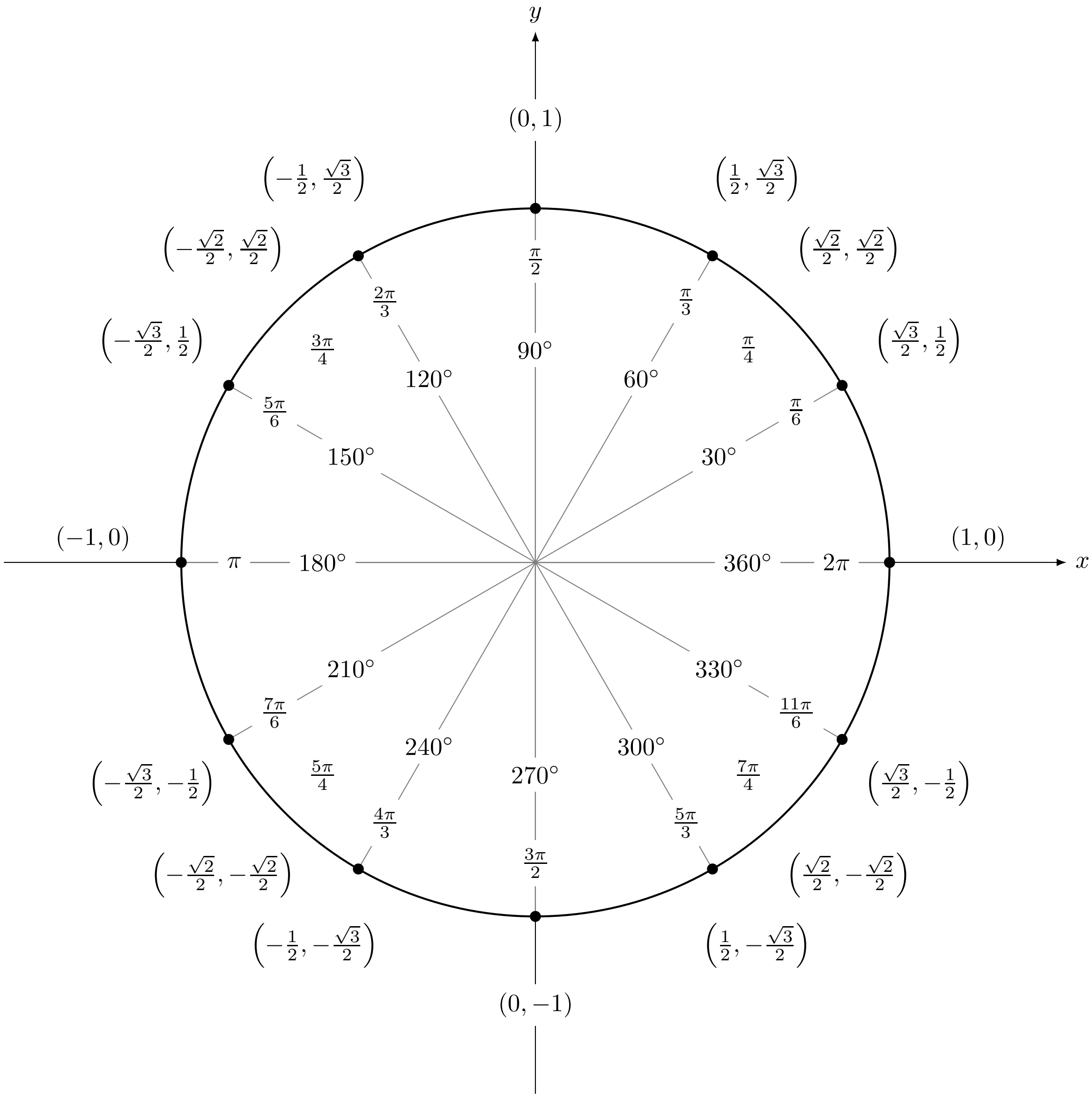
$$\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = 1 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}) = \frac{\pi}{2}$$

Définition 7.3.1. *Dans un tel cadre, à tout points M appartenant au cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O, nous associons les quantités suivantes :*

- *nous noterons θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$;*
- *le cosinus de θ, noté $\cos(\theta)$, correspondra à l'abscisse du point M ;*
- *le sinus de θ, noté $\sin(\theta)$, correspondra à l'ordonnée du point M.*



Voyons quelques propriétés de ces nouvelles fonctions. Tout d'abord, il est important de calculer quelques valeurs remarquables de ces fonctions.



Sur la figure précédente, l'abscisse de chaque point fourni la valeur du cosinus de l'angle correspondant et l'ordonnée la valeur du sinus. Par exemple, le point $M(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ permet de savoir que

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il est essentiel de retenir les valeurs suivantes.

θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Les autres valeurs peuvent être retrouvées de manière élémentaire à l'aide d'arguments géométriques que nous allons décrire ci-dessous.

7.3.1 Propriétés des fonctions trigonométriques

Proposition 25. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ les identités suivantes sont satisfaites*

- $\cos(x) \in [-1;1]$ *et* $\sin(x) \in [-1;1]$,
- $\cos(x + k2\pi) = \cos(x)$ *et* $\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$*, ces fonctions sont dites* 2π*- périodiques,*
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Voici les propriétés géométriques dont nous parlions plus tôt. Il en existe encore d'autres mais nous ne les aborderons pas dans ce cours.

Proposition 26. *Pour tout réel x, nous avons*

- *(Autour du cosinus)* $\cos(x) = \cos(-x)$ *et* $-\cos(x) = \cos(x - \pi) = \cos(x + \pi)$.
- *(Autour du sinus)* $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ *et* $-\sin(x) = \sin(-x) = \sin(\pi + x)$.
- *(Relation entre les deux)* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ *et* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.

A toute fin utile mentionnons également les formules d'additions suivantes :

Proposition 27. *Soient a, b deux réels alors*

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b) \quad \textit{et} \quad \sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$

7.4 Equations trigonométriques

Enfin, pour conclure ce chapitre, il faudra résoudre des équations de la forme

$$\cos(x) = u \quad \text{ou} \quad \sin(x) = u \quad \text{avec} \quad u \in [-1;1]$$

Autrement dit, lorsque u est une valeur donnée, il faut trouver l'ensemble des réels x satisfaisant les équations précédentes. Pour résoudre, ceci nous avons le résultat suivant

Proposition 28. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons les relations suivantes*

- $\cos(x) = \cos(a) \iff \{x = \pm a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

- $\sin(x) = \sin(a) \iff \{x = a + 2k\pi \quad ou \quad x = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque. En pratique pour résoudre $\cos(x) = u$ il faudra d'abord trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(a) = u$ pour ensuite appliquer le résultat précédent. Ce genre d'équations sera très important l'année prochaine lorsque vous étudierez les nombres complexes.