

Chapitre 7

Variations d'une fonction

7.1 Introduction

Après avoir étudié le signe d'une fonction, nous allons étudier d'autres propriétés d'une fonction. Nous allons donc aborder la notion de monotonie et d'extremum. Il s'agit de déterminer à quel moment une fonction augmente (ou diminue) en fonction de x , de repérer les maximum ou minimum (s'ils existent) et d'obtenir une notation synthétique de tout ceci. Voyons tout ceci au travers d'un exemple :

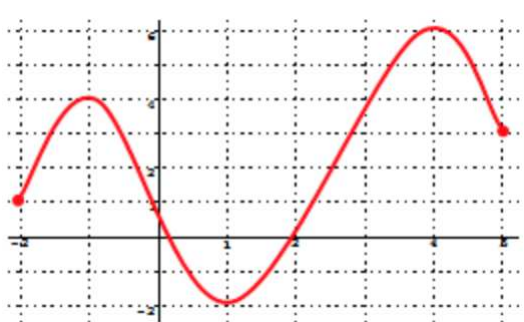


FIGURE 7.1 – Graphe d'une fonction f

Ceci se résume en :

x	-2	-1	1	4	5
$f(x)$	1	4	-2	6	3

Le tableau précédent est appelé un tableau de variations, voici les informations qu'il contient :

- L'intervalle d'étude (parfois appelé à tort *domaine de définition*) est lu dans la première ligne : $[-2; 5]$,
- En lisant le tableau en colonne, les image de certaines valeurs sont connues : $f(-2) = 1$, $f(4) = 6, \dots$
- Là où les flèches pointent vers le haut, la fonction est dite croissante : par exemple, f est croissante sur l'intervalle $[1; 4]$.
- De manière similaire, là où les flèches pointent vers le bas, la fonction est décroissante : par exemple, f est décroissante sur l'intervalle $[-1; 1]$.
- Le tableau permet d'obtenir des encadrements : si $x \in [4; 5]$ alors, d'après la deuxième ligne, $3 \leq f(x) \leq 6$. Nous allons voir dans la section prochaine qu'il permet aussi de comparer des images.

Définissons de manière formelle la notion de fonction croissante et décroissante introduite plus haut.

7.1.1 Sens de variation

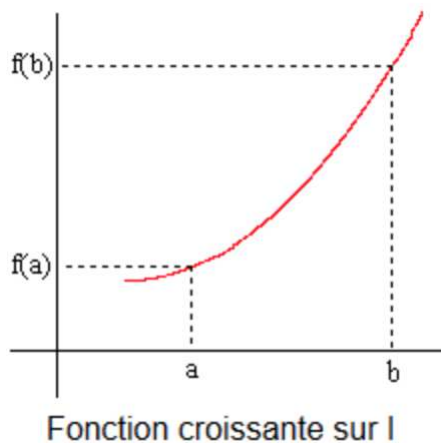
Dire qu'une fonction est croissante, sur un intervalle I , revient à dire que lorsque la valeur de x augmente dans l'intervalle I la valeur de $f(x)$ augmente également.

Définition 7.1.1. La fonction est dite croissante sur l'intervalle I si, pour tous réels $a \leq b$ alors

$$f(a) \leq f(b).$$

Une fonction croissante préserve l'ordre : c'est-à-dire, les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans le même ordre.

Remarque. Une fonction est dite strictement croissante si $a \leq b$ entraîne que $f(a) < f(b)$.



Exemple 7.1.1. • En reprenant l'exemple de l'introduction, nous observons que f est croissante sur les intervalles $[-2; -1]$, $[1; 4]$.

- En particulier, le tableau permet d'obtenir la comparaison suivante : puisque $2 \leq 3$ alors $f(2) \leq f(3)$ comme f est croissante sur $[1; 4]$.

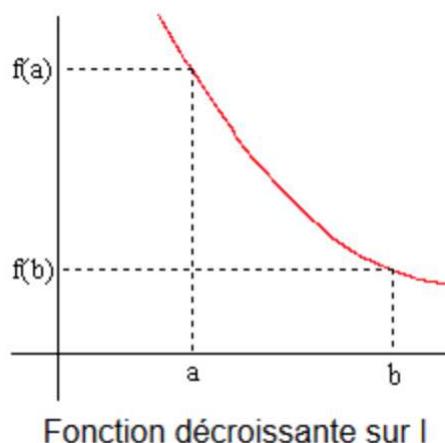
De manière analogue, une fonction est décroissante sur un intervalle I lorsque la valeur de l'image $f(x)$ diminue lorsque x augmente dans l'intervalle I .

Définition 7.1.2. La fonction est dite décroissante sur l'intervalle I si, pour tous réels $a \leq b$ alors

$$f(a) \geq f(b).$$

Une fonction décroissante renverse l'ordre : c'est-à-dire, les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans un ordre contraire.

Remarque. Une fonction est dite strictement croissante si $a \leq b$ entraîne que $f(a) < f(b)$.



Exemple 7.1.2. • En reprenant l'exemple de l'introduction, nous observons que f est décroissante sur les intervalles $[-1; 1]$, $[4; 5]$.

- En particulier, le tableau permet d'obtenir la comparaison suivante : puisque $0 \leq 1$ alors $f(1) \leq f(0)$ comme f est décroissante sur $[-1; 1]$.

En résumé, il est donc important de savoir dresser un tableau de variation à partir d'un graphique ou d'une série d'information. Il faut aussi être capable de comparer l'image de réels à partir des variations. Il faut également être capable de dessiner le graphique d'une fonction à partir de son tableau de variation.

7.1.2 Extremum

Il est parfois utile de déterminer, lorsqu'elles existent, la plus grande ou la plus petite valeur atteinte par une fonction f donnée.

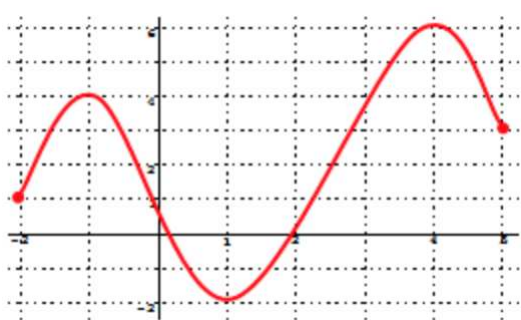
Définition 7.1.3. 1. Le maximum d'une fonction f sur un intervalle I est, s'il existe, la plus grande valeur possible des images, atteinte pour un réel $b \in I$. Ainsi, pour tout réel $x \in I$ nous avons

$$f(x) \leq f(b).$$

2. Le minimum d'une fonction f sur un intervalle I est, s'il existe, la plus petite valeur possible des images, atteinte pour un réel $a \in I$. Ainsi, pour tout réel $x \in I$ nous avons

$$f(a) \leq f(x).$$

Remarque. Le mot *extremum* désigne sans distinction le minimum ou le maximum d'une fonction.



Exemple 7.1.3.

1. Sur l'exemple ci-dessus, observons que sur $[-2; 5]$ le maximum est atteint en $x = 4$ et vaut $f(4) = 6$.
2. Tandis que sur l'intervalle $[-2; 2]$, le maximum est atteint en $x = -1$ et vaut $f(-1) = 4$.
3. Le minimum sur $[-2; 6]$ est atteint en $x = 1$ et vaut $f(1) = -2$.

Comme l'exemple précédent le montre, il est important de préciser l'intervalle d'étude.

La calculatrice est de nouveau utile pour déterminer, de manière approximative, les extremums. Pour cela, il suffit :

1. d'aller dans l'onglet $f(x)$ de la calculatrice pour définir $y_1 = f(x)$.
2. cliquer sur la touche *graphe*
3. cliquer ensuite sur le bouton *2nde + trace* et sélectionner la valeur *maximum* ou *minimum*.

Exemple 7.1.4. Etudions la fonction $h(x) = x^2 - 2x + \frac{7}{4}$.

1. Traçons la fonction sur l'intervalle $X_{\min} = -5$, $X_{\max} = 5$, $Y_{\min} = -1$ et $Y_{\max} = 10$.
2. La fonction *minimum* de la calculatrice nous dit que le minimum vaut 0,75 et est atteint pour $x = 1,000008$.
3. Vérifions ceci par le calcul :
 - (a) Il n'est pas difficile de calculer $h(1) = \frac{3}{4}$.
 - (b) On peut aussi vérifier que $h(x) = (x - 1)^2 + \frac{3}{4}$.

(c) Par suite $h(x) - h(1) = (x - 1)^2$. Or, $(x - 1)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc

$$h(x) - h(1) \geq 0 \iff h(x) \geq h(1) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, $h(1) = \frac{3}{4}$ est minimum atteint en $x = 1$. Les informations transmises par la calculatrice n'étaient pas exactes.

7.1.3 Fonctions affines et sens de variations

Etudions les variations d'un genre de fonction relativement simple que nous avons déjà rencontré.

Définition 7.1.4. *Etant donnés des nombres réels a et b , une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ par la formule suivante*

$$f(x) = ax + b$$

Remarque. 1. Lorsque $b = 0$ nous retrouvons le cas des fonctions linéaires. Les fonctions affines sont une généralisation des fonctions linéaires.

2. Le nombre b est souvent désigné sous le nom de « ordonnée à l'origine ». En effet, lorsque $x = 0$ une fonction affine vaut donc $f(x) = a \times 0 + b = b$. Ceci signifie que la courbe C_f d'une telle fonction passe par le point $(0, b)$. Graphiquement, lorsque $b \neq 0$, la droite représentant la courbe d'une fonction affine ne passe pas par l'origine du repère. En revanche, cette droite coupe l'axe des ordonnées au point b .

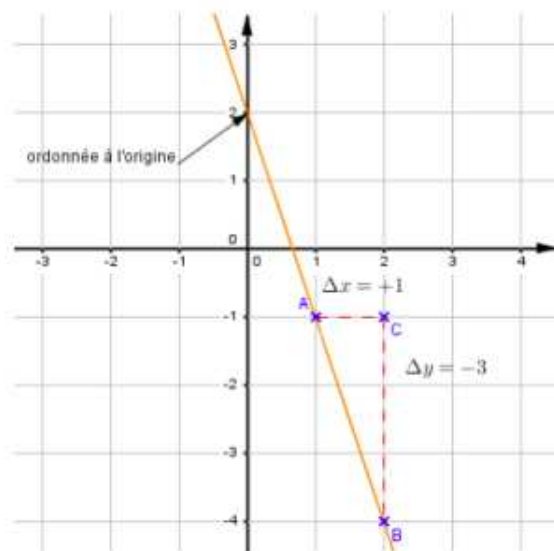


FIGURE 7.2 – Représentation de $f(x) = -3x + 2$

Voici un premier résultat permettant de trouver par le calcul la valeur du coefficient directeur a .

Proposition 23. Soit $f(x) = ax + b$ et deux points $A = (x_A; f(x_A))$ et $B = (x_B; f(x_B))$. Le coefficient directeur vaut

$$a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

Exemple 7.1.5. Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine telle que $f(2) = 6$ et $f(4) = 12$.

1. Déterminons la valeur de a :

$$a = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{12 - 6}{4 - 2} = 3$$

donc $f(x) = 3x + b$.

2. Déterminons la valeur de b . D'après ce qui précède, nous savons que $f(2) = 3 \times 2 + b$. Or, d'après l'énoncé $f(2) = 6$. Nous obtenons alors l'équation

$$3 \times 2 + b = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 0.$$

En conclusion, $f(x) = 3x$.

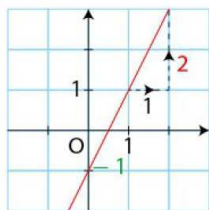
Voyons à présent comment caractériser les variations d'une fonction affine.

Théorème 24. Soit $f(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$. Alors

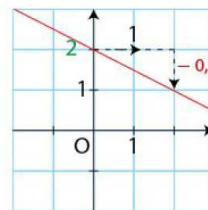
1. Si $a > 0$, la fonction affine est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si $a < 0$, la fonction affine est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Graphiquement, si $a > 0$ la droite pointe vers le « haut » du repère tandis que si $a < 0$ elle pointe vers le « bas » du repère.

Représentation graphique de la fonction affine
 $x \mapsto 2x - 1$ dans un repère.



Représentation graphique de la fonction affine
 $x \mapsto -0,5x + 2$ dans un repère.



Démonstration. Montrons le premier point, la deuxième assertion est laissée en exercice.

Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$, montrons alors que $f(x) \leq f(y)$ à condition que $a > 0$. **Le point important est que la**

multiplication d'une inégalité par un nombre strictement positif ne change pas le sens de celle-ci; l'ajout d'un nombre réel dans chaque membre non plus.

$$x \leq y \iff ax \leq ay \iff ax + b \leq ay + b \iff f(x) \leq f(y)$$

□

Exemple 7.1.6. La fonction $g(x) = -4x + 12$ est décroissante : en effet, soient $x \leq y$. Nous avons alors

$$x \leq y \iff -4x \geq -4y \iff -4x + 12 \geq -4y + 12 \iff f(x) \geq f(y).$$

7.2 Bilan du chapitre

Voici les compétences à maîtriser dans ce chapitre.

- Savoir lire et établir une représentation graphique d'une fonction.
- Savoir lire et établir le tableau de variations d'une fonction (notion de fonction croissante, décroissante, ...).
- Savoir déterminer les extremums d'une fonction à l'aide d'un tableau de variations ou d'une représentation graphique.
- Connaître les représentations graphiques des fonctions affines et savoir déterminer sa monotonie en fonction du coefficient directeur. Savoir déterminer la valeur de a et de b .
- Utilisation de la calculatrice : tracer une fonction, tableau de valeur, déterminer les extremums, trouver les points d'intersection avec une droite.
- Justifier par le calcul qu'une valeur est un maximum ou un minimum.

7.3 Exercices potentiels

- Sens de variation : 18p240,
- Tableau de variations : 21, 22, 23p240
- Utilisation tableau de variation : 29, 32, 34, 35p241
- Fonction affines : 38p242, 41, 42p242
- Extremums : 44, 45, 47p242

