Chapitre 8

Variable aléatoire, loi de probabilité, espérance

8.1 Introduction

Contrairement à d'autres branches des mathématiques, la géométrie euclidienne ou l'algèbre par exemple, les probabilités sont nées beaucoup plus tardivement. Quelques considérations élémentaires furent abordées par Jérôme Cardan au début du XVI-ième siècle et par Galilée au début du XVII-ième siècle mais le véritable début de cette théorie date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal, en 1654.

Il fallut attendre la deuxième moitié du XVII-ième siècle, à la suite des travaux de Blaise Pascal et Pierre de Fermat, pour que le terme « probabilité » prenne peu à peu son sens actuel, grâce aux études menées par Jakob Bernoulli.

A la fin du XVIII-ième siècle, cette nouvelle théorie fera son apparition dans l'encyclopédie de Diderot. Cependant, il fallut patienter jusqu'au début du XX-ième siècle pour que la théorie des probabilités un nouvel essor. Celui-ci est du à la mise en place, en 1933, par le mathématicien russe Kolmogorov, d'une axiomatisation mathématique (que nous utilisons toujours actuellement) permettant de traiter la théorie des probabilités avec une véritable rigueur. Il fut d'ailleurs à l'origine de travaux révolutionnaires dans cette branche et résolu un grand nombre de problèmes qui avait dérouté de nombreux mathématiciens de l'époque.

Bien entendu, il existe de nombreuses expériences aléatoires beaucoup plus complexes que celles vues en classe de seconde (lancé de dés, pile ou face,...). Cependant la description précise de celles-ci dépasse largement le cadre de ce cours. A titre d'exemple, voici un phénomène qu'il est possible de visualiser chez soi : imaginons que nous observions un grain de poivre dans une casserole d'eau bouillante. Les molécules d'eau, agitées, vont venir frapper et déplacer le grain de poivre. La trajectoire du grain de poivre devient alors erratique, imprévisible et correspond à un objet probabiliste très célèbre : le mouvement Brownien. Celui-ci a été découvert par le botaniste Brown (en 1827) et fut étudié par Einstein (en 1905), cet objet est notamment utilisé, entre autre, en finance pour décrire l'évolution de la bourse. Il est également possible de visualiser ceci en ligne, sur le site

$$http://labs.minutelabs.io/Brownian-Motion/.$$

8.2 Loi d'une variable aléatoire

8.2.1 Variable aléatoire

Définition 8.2.1. *Soit* Ω *l'univers associé à une expérience aléatoire. Définir une variable aléatoire* X *sur* Ω *revient à associer à chaque issue de* Ω *un nombre* $p \in [0;1]$.

Remarque. Une variable aléatoire est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dont l'issue est aléatoire.

Voici un exemple permettant de mieux appréhender ceci.

Exemple 8.2.1. Considérons l'expérience aléatoire suivante.

Un joueur mise 2 euros puis lance deux dés trétraédiques parfaits. Il lit le résultat obtenu sur chacun des dés (un entier compris entre 1 et 4). S'il obtient un « double », le joueur récupère sa mise et reçoit une somme, en euros, égale au total des points marqués; sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.

Nous nous intéressons au gain (algébrique) du joueur que nous noterons X (les valeurs prises par la fonction X sont aléatoires, il s'agit bien d'une variable aléatoire).

Décrivons plus en détails, l'expérience aléatoire mise en jeu :

- l'univers de cet expérience est un couple d'entier $(x;y)$ avec $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y \leq 4$. Les dés étant parfaits, les issues obtenues sont équiprobables et se réalisent avec une probabilité de $\frac{1}{16}$.
- Pour définir la variable X il est important de décrire les valeurs qu'elle va prendre à partir des différentes issues de l'expérience aléatoire. Ceci peut s'effectuer à l'aide d'un tableau à double entrée : la première ligne désigne le résultat du premier dé, tandis que la première colonne correspond à la valeur affichée par le deuxième dé. C'est-à-dire, a chaque issue nous associons un gain : $(1,1) \mapsto 2$, $(1,2) \mapsto -2$,... afin de définir la variable aléatoire X.

	1	2	3	4
1	2	-2	-2	-2
2	-2	4	-2	-2
3	-2	-2	6	-2
4	-2	-2	-2	8

En résumé $X \in \{-2;2;4;6;8\}$. Pourtant cette description de X n'est pas encore satisfaisante, c'est l'intérêt de la section suivante.

8.2.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Une fois qu'une variable aléatoire est définie, il est intéressant de déterminer avec quelle probabilité les différentes valeurs sont prises. Par exemple, quelle est la probabilité de l'évènement « gagner 2 euros » ? Autrement dit, quelle est la probabilité de l'évènement $X = 2$?

En utilisant le tableau de la section précédente, nous observons que cet évènement est uniquement réalisé pour l'issue $(1; 1)$. Donc, puisqu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité,

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{16}.$$

De manière similaire, l'évènement $X = -2$ est composé de 12 issues (tous les couples $(x; y)$ avec $x \neq y$), cela assure donc que

$$\mathbb{P}(X = -2) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Il est alors utile de résumé ceci dans un tableau.

Gain x_i	-2	2	4	6	8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Ce tableau représente la loi de probabilité de X.

Définition 8.2.2. *Soit X est une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$ et désignons par $x_1, \dots, x_k$ les différentes valeurs prises par X.*

Définir la loi de probabilité de X consiste à associer à chaque valeur x_i (pour $i = 1, \dots k$) la probabilité de l'évènement $X = x_i$.

Remarque. Observons que $\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

8.3 Paramètres associés à une variable aléatoire

8.3.1 Espérance, variance et écart-type

Dans ce qui suit nous considérons une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

Valeur x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_k

Définition 8.3.1. *Voici trois paramètres associé à une variable aléatoire X :*

- *l'espérance de X, notée $\mathbb{E}[X]$ définie par*

$$\mathbb{E}[X] = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$$

- *la variance de X, notée par* $\mathrm{Var}(X)$ *et définie par*

$$\mathrm{Var}(X) = p_1\big(x_1 - \mathbb{E}[X]\big)^2 + p_2\big(x_2 - \mathbb{E}[X]\big)^2 + \ldots + p_k\big(x_k - \mathbb{E}[X]\big)^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i\big(x_i - \mathbb{E}[X]\big)^2$$

- *l'écart-type de X, noté $\sigma(X)$ et définie par $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.*

Remarque. 1. L'espérance est, en probabilité, l'analogue de la moyenne en statistiques. Lorsque X modélise un jeu de hasard, $\mathbb{E}[X]$ peut s'interpréter comme le gain moyen pouvant être espéré par le joueur.

2. La variance peut aussi s'exprimer de la manière suivante :

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Il s'agit de la formule de König-Huygens.

3. La variance quantifie les fluctuations autour de la moyenne. Par exemple, supposons qu'un enseignant ait calculé la moyenne et la variance des notes obtenues par une classe :
   (a) si la moyenne vaut 11 et la variance vaut 6, cela signifie que des élèves ont eu de très bonnes notes (17/20 par exemple) tandis que d'autres élèves ont raté le devoir (5/20 par exemple) ; le fait que la variance soit élevé retranscrit le fait que le niveau de la classe est hétérogène
   (b) si la moyenne vaut 11 et la variance vaut 1, cela signifie que le niveau de la classe est homogène et qu'une grande majorité des élèves ont obtenu une note comprise entre 10/20 et 11/20.

Exemple 8.3.1. Reprenons l'exemple du jeu de dé pour calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

1. $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{4} \times (-2) + \frac{1}{16} \times 2 + \frac{1}{16} \times 4 + \frac{1}{16} \times 6 + \frac{1}{16} \times 8 = -0,25$. S'il le joueur joue un très grand nombre de parties (plus de 30) dans les mêmes conditions, le gain moyen qu'il peut espérer est de $-0,25$. Il s'agit d'une application de la loi forte des grands nombres de Kolmogorov.

2. Ici, $\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{4} \times (-1,75)^2 + \frac{1}{16} \times (2,25)^2 + \frac{1}{16} \times (4,25)^2 + \frac{1}{16} \times (6,25)^2 + \frac{1}{16} \times (8,25)^2 = 10,4375$.

3. L'écart-type vaut donc $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 3,23$ (environ).

Voici d'autres propriétés utiles de l'espérance et de la variance.

8.3.2 Formules

Proposition 29. *Soit X est une variable aléatoire et considérons a, b des nombres réels. Les formules suivantes sont alors vérifiées*

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b \quad \textit{et} \quad \mathrm{Var}(aX) = a^2\mathrm{Var}(X).$$

Démonstration. Par définition,

$$\mathbb{E}[aX + b] = \sum_{i=1}^{k} p_i(ax_i + b) = a\sum_{i=1}^{k} p_i x_i + b \times \sum_{i=1}^{k} p_i = a\sum_{i=1}^{k} p_i x_i + b = a\mathbb{E}[X] + b.$$

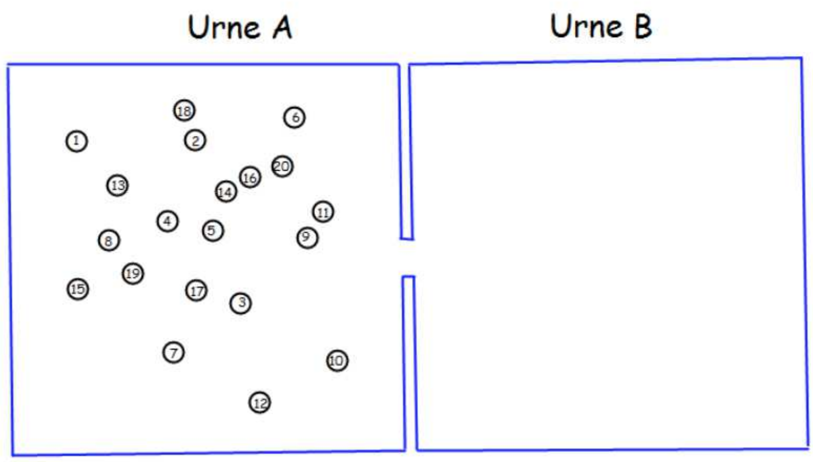
De manière analogue, grâce à la formule de König-Huygens, nous avons

$$\mathrm{Var}(aX) = \sum_{i=1}^{k} p_i(ax_i)^2 - \big(\mathbb{E}[aX]\big)^2 = a^2\sum_{i=1}^{k} p_i(x_i)^2 - a^2\big(\mathbb{E}[X]\big)^2 = a^2\mathrm{Var}(X).$$

□

8.4 Pour aller plus loin : urne d'Ehrenfest

L'urne d'Ehrenfest est une expérience impliquant deux urnes contenant un total de N boules indiscernables au touché. Toutes ces boules sont numérotées de 1 à N et l'expérience consiste à tirer au hasard un numéro $l \in \{1, \ldots, N\}$ pour ensuite transférer la boule numéro I dans l'urne où elle n'était pas.



Le processus aléatoire d'Ehrenfest $(X_n)_{n\geq 0}$ (qui peut être vu une suite aléatoire) consiste à noter à chaque instant $n \geq 0$ le nombre de boules contenues dans la première urne.

Cette expérience est là pour modéliser le problème physique suivant : prenons une enceinte hermétique séparée en deux compartiments de taille égale reliés entre eux par un fin tuyau. Laissant vide le compartiment B, remplissons le compartiment A d'un gaz quelconque.

Assez rapidement, les molécules de gaz vont migrer du compartiment A vers le compartiment B, jusqu'à l'établissement d'une situation d'équilibre. En moyenne, le nombre de molécules dans chaque compartiment sera identique.

Les époux Ehrenfest se sont intéressés à ce modèle car il permettait d'étudier mathématiquement un paradoxe physique :

- à l'échelle microscopique, il est possible d'observer un phénomène réversible provenant de la mécanique classique (le déplacement des boules d'une urne à l'autre) ;
- à l'échelle macroscopique, la théorie de la thermodynamique assure que le phénomène est irréversible (tout comme un verre cassé ne peut se réparer de lui même, il n'est pas possible que le gaz, après un moment, s'accumule dans une urne plutôt que l'autre).

L'étude (par le biais des chaines de Markov) de l'urne d'Ehrenfest permet de lever ce paradoxe.

8.5 Exercices potentiels

- vocabulaire et variables aléatoires : exo $16, 17, 21, 24, 25, p305$
- espérance, variance : $28, 31p306$ $53, 57p308$ $77, 79p312$

8.6 Bilan du chapitre

- Déterminer la loi d'une variable aléatoire, calculer des espérances et des variances. Interpréter des résultats.