Chapitre 1

Second degré

1.1 Introduction

Définition 1.1.1. *Une fonction polynomiale de degré deux (ou trinôme du second degré) est une fonction de la forme*

$$f\,:\,x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$ *et* $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque. Le domaine de définition de f est l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

Dans ce chapitre nous allons chercher à résoudre des équations, dites du second degré, associées à ce type de fonction. C'est à dire, nous allons résoudre des équations de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \text{ et } (b, c) \in \mathbb{R}^2$$

Nous ferons également le lien entre les solutions de l'équation précédente avec la représentation graphique de la fonction f définie plus haut. Ce genre de considération remonte à l'époque des Babyloniens (8ième siècle avant J.C.) et la résolution des équations du second degré a été débutée par Al-Khwarizmi (dont le nom latinisé fournira le mot « algorithmie ») au 9ième siècle.

Ce genre de fonctions et d'équations apparaissent naturellement dans certains problèmes. Par exemple :

- si nous souhaitions décrire le mouvement effectué par un cycliste (ou skieur, skateboarder, etc) après avoir pris un tremplin,

- si nous cherchions à modéliser l'évolution du nombre de naissance lors d'un « baby boom »,

- enfin, si nous voulions résoudre le problème d'optimisation suivant : étant donné un triangle scalène (quelconque) APB dont le côté AB est de longueur 1, sur lequel nous plaçons un point $M \in [A, B]$ et un point $Q \in [PB]$ de tels sorte que les triangles APM et MQB soient équilatéraux, comment choisir la position du point M pour maximiser l'aire du triangle MPQ ou pour minimiser l'aire du quadrilatère $APQM$?

1.2 Rappels et pré-requis

Pour entamer ce chapitre, certains pré-requis sont nécessaires. Voici une liste, non-exhaustive, de ce qu'il faut savoir maitriser :

1. Connaitre ses identités remarquables.

2. Savoir résoudre des équations de la forme suivante
   - $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$
   - $x^2 - 9 = 0$ ou $x^2 + 2x + 1 = 0$
   - $(3x - 4)(-2x + 5) = 0$ ou encore $2x^2 + 3x = 0$
   - ...
3. De manière similaire, savoir résoudre des inéquations de la forme : $x^2 > 5$, $x^2 < -2 \dots$

1.3 Forme canonique

Ce court préambule étant achevé, nous pouvons entamer le début de chapitre. Nous commençons par la *forme canonique* d'un polynôme du second degré. Comme nous allons le voir par la suite, cette écriture particulière d'un trinôme du second degré permet de résoudre facilement les équations du second degré (sous certaines conditions) mais aussi de déterminer les extremums d'une fonction polynomiale de degré deux. Par la suite, nous désignerons constamment (sauf mention explicite du contraire) par polynôme du second degré, une fonction f de la forme suivante :

$$f \,:\, x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 1 (Forme canonique)**.** *Tout polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme canonique*

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant du polynôme.

Démonstration. Soit f un polynôme du second degré : *i.e.* $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Puisque a est non nul, il est alors possible d'écrire

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

En imaginant que les termes $x^2 + \frac{b}{a}x$ sont le début d'un identité remarquable

$$(x + \dots)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \dots$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

$\square$

Voici quelques exemples :

Exemple 1.3.1. 1. Si $f(x) = x^2 + x + 1$, nous avons alors

$$f(x) = (x^2 + x) + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

2. Si $f(x) = x^2 - 2x - 15$, nous avons alors

$$f(x) = (x^2 - 2x) - 15 = (x - 1)^2 - 1 - 15 = (x - 1)^2 - 16$$

3. Si $f(x) = x^2 + 2x + 1$, alors

$$f(x) = (x + 1)^2 + 0$$

1.4 Résolution d'équations du second degré

Désignons par (E) l'équation du second degré suivante :

$$(E) : \quad ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \text{ et } (b, c) \in \mathbb{R}^2$$

et notons f la fonction associée.

Définition 1.4.1. *Les solutions de l'équations (E) sont appelées* racines *de f.*

Remarque. Nous verrons un peu plus tard que celles-ci, lorsqu'elles existent, correspondent géométriquement aux points d'intersections de la courbe C_f (associée au polynôme f) avec l'axe de abscisses.

Nous allons voir que la forme canonique introduite précédemment et le signe du discriminant Δ permettent de savoir s'il existe des racines réelles et d'obtenir une expression de celles-ci.

Proposition 2 (Résolution d'équation d'ordre deux)**.** *Avec les notations précédentes, trois cas de figure se présentent à nous :*

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux racines, réelles, distinctes*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle (dite double)*

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

3. *Enfin, si $\Delta < 0$, l'équation (E) n'admet aucune racine réelle.*

Remarque. Lorsque $\Delta = 0$, cela signifie qu'il était possible d'utiliser une identité remarquable pour résoudre l'équation (E) et qu'il n'était pas utile de calculer le discriminant. En classe de Terminale S, vous verrez qu'il est possible de trouver, avec un peu d'imagination, des solutions (dans un contexte plus large) à l'équation (E) lorsque $\Delta < 0$.

Démonstration. Soit f un polynôme du second degré, rappelons qu'il est possible d'exprimer f sous sa forme canonique :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{avec} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Ainsi, la résolution de l'équation (E) est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

1. Supposons, dans un premier temps que $\Delta > 0$. Alors, $\sqrt{\Delta}$ existe et l'équation précédente peut s'écrire comme suit :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

Il est alors possible d'utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ qui nous fournit

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) S s'exprime de la manière suivante :

$$S = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\} = \left\{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

2. Supposons à présent que $\Delta = 0$. En reprenant les calculs précédents, la résolution de l'équation (E) est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Il est alors aisé de déterminer l'ensemble des solutions S :

$$S = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\} = \left\{x_0 = \frac{-b}{2a}\right\}$$

3. Enfin, si $\Delta < 0$, l'équation (E) est équivalente à
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$
Pour conclure, il suffit d'observer que le membre de droite est strictement négatif (par hypothèse $\Delta < 0$) tandis que le membre de gauche est positif ou nul (il s'agit d'un carré). En conséquence, il ne peut pas exister de solutions réelles (si elles existaient, nous aurions une contradiction).

□

Exemple 1.4.1. Résolvons les équations suivantes à l'aide, si nécessaire, de la proposition précédente :

1. $x^2 - 2x - 15 = 0$
2. $x^2 + x + 1 = 0$
3. $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Exemple 1.4.2. Proposer un algorithme permettant de résoudre une équation du second degré à partir d'un polynôme du second degré donné.

1.5 Signe d'un polynôme du second degré

Le lecteur attentif aura remarquer que la démonstration de la proposition précédente nous permet d'obtenir une forme factorisée du polynôme f lorsque $\Delta \geq 0$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant qui nous permet de déterminer le signe d'un polynôme du second degré en fonction du signe de son coefficient dominant (le coefficient apparaissant devant le terme en x^2).

Proposition 3 (Factorisation d'un polynôme du second degré)**.** *Dans le même contexte, nous avons les factorisations suivantes du polynôme f :*

1. *Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec x_1 et x_2 les racines de f.*
2. *Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x - x_0)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec x_0 la racine double de f.*

Remarque. Lorsque $\Delta < 0$, il n'est pas possible de factoriser (dans $\mathbb{R}$) le polynôme f.

Lorsque le polynôme est sous forme factorisée, il est alors possible de dresser un tableau de signe.

Corollaire 4. *Sous le contexte précédent, pour tout réel x, nous avons les résultats suivants :*

1. *Lorsque $\Delta > 0$ et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$ (par exemple) les deux racines du polynôme, nous avons le tableau de signe suivant :*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	0	*$-$signe de a*	0	*signe de a*	

2. *Lorsque* $\Delta = 0$ *et* $f(x) = a(x - x_0)^2$ *avec* x_0 *la racine double de* f*, nous avons*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	0	*signe de a*	

3. *Lorsque* $\Delta < 0$*, le polynôme* f ne s'annule jamais *et nous avons*

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	

Démonstration. La démonstration de ce résultat repose sur les formes factorisées, du polynôme f, obtenues via la forme canonique et le signe du discriminant. A partir de celles-ci, il est facile de dresser un tableau de signe pour chaque cas de figure.

1. Si $\Delta > 0$, nous avons

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		signe de a	0	$-$signe de a	0	signe de a	

2. Si $\Delta = 0$ nous avons $f(x) = a(x - x_0)^2$. Observons alors que $f(x_0) = 0$ et que $(x - x_0)^2 > 0$ si $x \neq x_0$ pour conclure.

3. Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de factorisation de f permettant de dresser un tableau de signe. Cependant, la forme canonique de f va nous permettre de conclure. En effet, celle ci nous fournit l'expression suivante

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observons alors que $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ (puisque $\Delta < 0$) et $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Ce qui nous permet d'en déduire que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Ainsi, le signe de f est dicté par celui du coefficient dominant a.

□

Exemple 1.5.1. 1. Déterminons le signe du polynôme $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Résolvons l'inéquation $3x - 4 + \frac{5}{x} < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.6 Représentation graphique d'un polynôme du second degré

Nous allons maintenant présenter des propriétés graphiques de polynômes du second degré. Dans ce qui suit, f désigne encore un polynôme de degré deux dont nous rappelons sa forme canonique :

$$f(x) = a\big[(x - \alpha)^2 + \beta\big], \quad x \in \mathbb{R}$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a^2}$.

Proposition 5 (Variations et extremum)**.** *La courbe représentative de la fonction f, que nous noterons C_f, est une parabole dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \alpha$ et dont le sommet S a pour coordonnées $S\big(\alpha; f(\alpha) = \beta\big)$.*

De plus, si $a > 0$, f atteint son minimum au point α (cf. figure) :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

En revanche, si $a < 0$, f atteint alors son maximum en ce même point (cf. figure) :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Démonstration. A partir de la forme canonique et en s'appuyant sur le cours de 2nd, nous remarquons que f est une parabole dont les paramètres sont donnés par les réels (a, α, β). Nous distinguons alors deux cas de figure :

- Si $a > 0$, la fonction $g(x) = a(x - \alpha)^2$ est décroissante pour $x \leq \alpha$ et croissante pour $x \geq \alpha$. De plus, elle admet un minimum en $x = \alpha$. Par conséquent, la fonction f étant une translation de g, f admet les mêmes variations. Le point minimal de sa courbe représentative est donné par $S\big(\alpha, f(\alpha)\big)$.

- Si $a < 0$, la fonction g a des variations opposées au cas précédent. La fonction f admet alors un maximum en $x = \alpha$.

□

Remarque. Lorsque $a > 0$ (resp. $a < 0$), il est coutume de dire que la parabole est orientée vers le bas (resp. vers le haut).

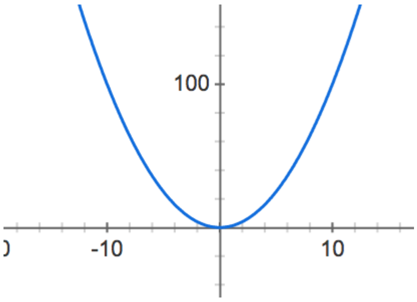

FIGURE 1.1 – $a > 0$

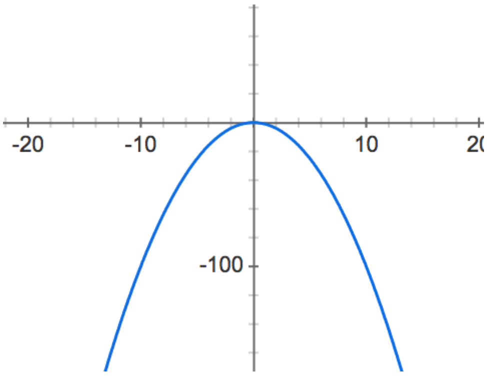

FIGURE 1.2 – $a < 0$

Maintenant que nous avons établi que la courbe représentative d'un polynôme du second degré était une parabole, nous pouvons compléter notre étude en utilisant les tableaux de signe de la section précédente. Géométriquement, nous allons voir que les racines de f correspondent aux points d'intersections entre C_f et l'axe des abscisses.

Proposition 6 (Position par rapport à l'axe des abscisses)**.** *Dans le même contexte que ce qui précède, nous avons à nouveau trois cas de figures :*

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ ayant deux solutions, la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisse x_1 et x_2.*

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ ayant une solution, la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_0.*

3. *Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'ayant aucune solution, la courbe C_f ne rencontre jamais l'axe des abscisses et reste du signe de a.*

Exemple 1.6.1. Voici trois exemples, pour lesquels $a > 0$, illustrant les cas de figures envisageables.

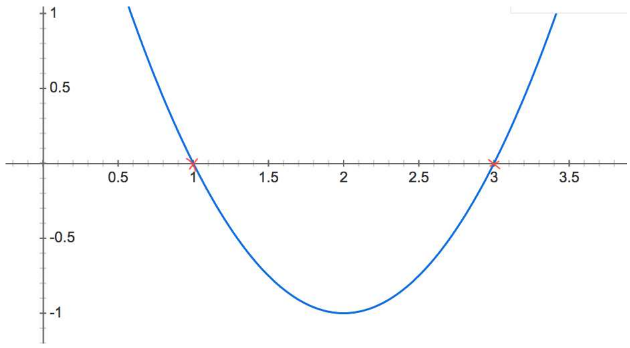

FIGURE 1.3 – $\Delta > 0$: deux racines distinctes en $x = 1$ et $x = 3$

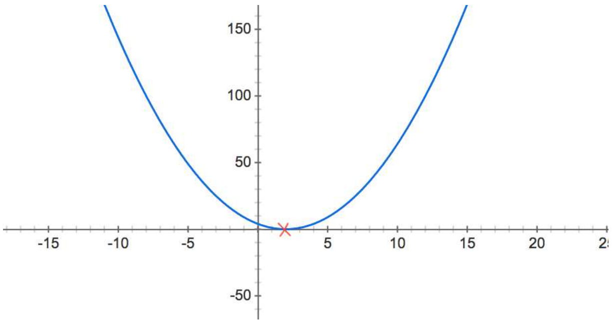

FIGURE 1.4 – $\Delta = 0$: 1 racine (double) en $x = 2$

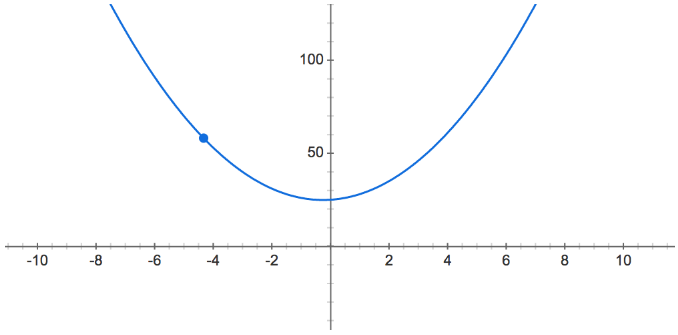

FIGURE 1.5 – $\Delta < 0$: pas de racines réelles

Remarque. Nous retrouvons également de manière graphique, les résultats obtenus sur le signe d'un polynôme du second degré.

1.7 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Recherche des racines d'un polynôme du second degré f (solutions de l'équation $f(x) = 0$).
- Forme canonique, développée et factorisée d'un polynôme de degré 2 f.
- Signe d'un polynôme du second degré f avec résolution d'inéquations.
- Variation d'un polynôme du second degré f et extrema (minimum ou maximum) avec ses coordonnées.
- Représentation graphique complète.
- Position relative de deux courbes du premier et/ou second degré.

En complément, il pourra être demander de mobiliser les connaissances précédentes pour :

- Utiliser un changement de variable pour résoudre une équation de degré supérieur.
- Résoudre des problèmes d'optimisation de distance, d'aire, etc ...

1.8 Challenges

Pour les plus curieux, voici deux problèmes facultatifs (bien évidemment hors programme) donnant des pistes de résolutions d'équations de degré supérieur.

1.8.1 Méthode de Cardan (publiée dans l'Ars Magna en 1545)

Longtemps après les travaux d'Al-Khwarizmi, des mathématiciens italiens se sont penchés sur la résolution d'équation de degré trois. L'un des premiers fut Scipione del Ferro en 1515, suivit de son élève Tartaglia en 1535 et enfin le mathématicien Cardan (1545). Ce genre de recherche pouvait être motiver, entre autres, pour être appliquer à des problèmes de ballistiques. Il est à noter qu'à l'époque ce genre d'exercices n'en était qu'à ses balbutiements et qu'il était prestigieux de découvrir des méthodes de résolutions. La recherche de ce prestige entraina bien sûr des rancoeurs et des querelles quant à la paternité d'une découverte, ce fut notamment le cas entre Tartaglia et Cardan.

Voyons à présent une équation de degré trois :

$$(\tilde{E}) : \quad z^3 - 15z - 4 = 0$$

Voici quelques indications pour déterminer les trois racines réelles de ce polynôme :

- Connaissant les racines x_1 et x_2 du polynôme $f(x) = x^2 + bx + c$, est-il possible d'exprimer les coefficients b et c en fonction de ces racines ?
- Il pourra être utile de chercher les racines de $(\tilde{E})$ sous la forme $z = u + v$ en imposant la condition $u^3v^3 = \frac{15^3}{27}$.
- Tout comme la mathématicien Bombelli (1526-1572), il faudra faire preuve d'un peu d'imagination pour résoudre ce problème quitte à écrire des choses qui semblent fausses (voir même absurdes) dans un premier temps.

1.8.2 Méthode de Ferrari (1522-1565)

Elève de Cardan, ce mathématicien s'est penché sur les équations de degré quatre. Essayons de résoudre l'équation suivante :

$$(\hat{E}) : \quad x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 10 = 0$$

Voici quelques indications pour déterminer les deux racines réelles de ce polynôme :

- Procéder à un changement de variable en posant $z = x - 1$ afin d'obtenir une nouvelle équation $(\hat{E}_1)$.
- Soit $y \in \mathbb{R}$ un paramètre à choisir ultérieurement, développer $I = (z^2 + y)^2$ et utiliser l'équation $(\hat{E}_1)$ pour obtenir une expression de I en fonction d'un polynôme de degré deux en z que nous noterons P (attention les coefficients de ce polynôme dépendront de y).

- Chercher un moyen de factoriser ce nouveau polynôme P sous la forme de carré. Il pourra être utile d'observer que la condition permettant cette factorisation s'écrit sous la forme d'une équation de degré trois (d'inconnue y) dont il est possible d'obtenir une racine évidente.

1.8.3 Quelques dernières remarques

Les indications précédentes sont laissées volontairement floues, l'idée derrière cela est d'essayer de vous faire découvrir de quelle manière les mathématiciens (de l'époque mais aussi de nous jours) procèdent lorsqu'ils essaient de résoudre un problème. La solution survient souvent après de longs tâtonnements et de nombreux essais infructueux.

Comme souvent, obtenir une réponse à une question donnée soulève de nouvelles problématiques. A titre d'exemples, voici quelques questions qui pourraient survenir après ces deux challenges :

1. Comment traiter les cas généraux ? De quelle manière serait-il possible de généraliser les méthodes précédentes pour traiter, de manière formelle, les équations de degré trois et quatre comme nous l'avons fait de ce cours pour le degré deux ?

2. Dans le cours, nous avons vu que lorsque $\Delta < 0$ il n'existait pas de racines réelles. Existe-t-il des critères analogues pour les degrés supérieurs.
3. A votre avis, est-il toujours possible de résoudre une équation polynomiale de manière algorithmique (comme nous l'avons fait pour le degré deux en calculant Δ) et ceci peut importe le degré du polynôme considéré ?