Chapitre 3

Suites numériques

3.1 Introduction

Les suites numériques sont des objets mathématiques qui apparurent naturellement au cours de l'Histoire. Par exemple, en considérant le fait de consigner les résultats d'une expérience (la hauteur d'une plante, le nombre d'insecte dans une fourmilière,...) : la valeur de u_0 correspondrait alors aux données initiales, la valeur de u_1 celles du jour suivant et ainsi de suite.

Cette façon d'indexer des données est présent dans l'Histoire depuis très longtemps. Il est possible de trouver des traces de ceci chez Archimède (287/212 avant *J.C.*) ou encore au 1er siècle après *J.C.* avec la méthode d'Héron d'Alexandrie (servant à extraire une racine carrée). L'étude des suites numériques préoccupa, beaucoup plus tard, à nouveau les mathématiciens au 17ème siècle avec la méthode des indivisibles de Cavalieri permettant de calculer simplement des aires ou des volumes. Cette branche des mathématiques est présentée dans l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert en 1751 et son étude est poursuivie par d'éminents mathématiciens (Newton, Lagrange, Bernoulli,...) de l'époque. Elle intervient également de nous jours en analyse numérique et apparait dans certains procédés de modélisation par ordinateurs.

3.2 Définition

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, une suite numérique consiste numéroter un ensemble de valeurs à l'aide des entiers naturels. Par exemple, la liste de réels $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$ se numéroterait de la manière suivante :

$$u_0 = 0,\ , u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2,\ u_4 = 3,\ u - 5 = 5,\ u_6 = 8,\ u_7 = 13$$

u_0 correspond au premier terme de la suite, u_1 au deuxième terme de la suite et ainsi de suite. Plus formellement, cela revient à considérer une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Définition 3.2.1. *Une suite est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, c'est à dire*

$$\begin{array}{rccc} u & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & u(n) \end{array}$$

Pour alléger les notations, nous noterons $u(n)$ par u_n. Cette valeur est appelée terme de rang n de la suite.

Remarque. Comme nous allons le voir par la suite, ce type particulier de fonctions est beaucoup plus simple à étudier puisque nous ne considérons que les valeurs prises par la fonction sur les entiers plutôt que sur l'ensemble des réels (nous considérons $u(n)$, $n \in \mathbb{N}$ plutôt que $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$).

Au niveau des notations : nous désignerons une suite (l'ensemble de ses valeurs) par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Naturellement, le terme précédent u_n est u_{n-1} et le terme suivant u_{n+1}.

Voyons à présent de quelle manière il est possible de définir une suite.

3.2.1 Formule explicite

Il y a plusieurs façons de créer une suite, la première consiste à donner une formule explicite, c'est-à-dire $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ pour une fonction f donnée. Cette façon de faire permet de calculer facilement la valeur de n'importe quel terme souhaité.

Exemple 3.2.1. 1. Si $f : x \mapsto \sqrt{x-7}$ nous avons alors $u_n = f(n)$, $n \geq 7$ et les premières termes de cette suite sont alors $u_7 = 0$, $u_8 = 1$, $u_9 = \sqrt{2}, \ldots$.

2. Si $v_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ alors $v_0 = 1$, $v_{2011} = -1, \ldots$.

3. Si $w_n = \frac{4}{n+1}$, $n \geq 0$ alors $w_0 = 4$, $w_1 = 2$, $w_2 = \frac{4}{3}, \ldots$.

Remarque. Il n'est pas obligatoire qu'une suite débute au rang $n = 0$. Comme nous pouvons le constater avec l'exemple précédent, les termes $u_0, \ldots, u_6$ n'existe pas car la fonction f n'est pas définie en ces points.

Représentation graphique

Lorsqu'un suite est définie à l'aide d'une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, c'est à dire $u_n = f(n)$, $n \geq 0$, sa représentation graphique consiste à placer dans un repère orthonormée les points $A_0(0, u_0)$, $A_1(1, u_1)$, $A_2(2, u_2), \ldots$.

Exemple 3.2.2. Placer sur un graphique les quatre premiers termes de la suite $u_n = \frac{6}{n+2}$, $n \geq 0$. Même question avec la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ définie par $t_n = n(4-n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Voyons une autre façon de faire.

3.2.2 Formulation par récurrence

Une autre manière de procéder est de définir une suite par récurrence. Cela consiste à calculer un terme de la suite au fur et à mesure à partir du terme précédent.

Définition 3.2.2. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ peut être définie à l'aide*
- *d'une valeur initiale, ici $u_0 \in \mathbb{R}$*

- *d'une relation exprimant u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n.*

Exemple 3.2.3. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$, $n \geq 1$. Nous pouvons alors calculer un par un les termes de la suite :

$$u_1 = 3 \times u_0 - 2 = 3 \times 5 - 2 = 13 \quad \text{puis} \quad u_2 = 3 \times u_1 - 2 = 3 \times 13 - 2 = 37 \quad \text{etc}$$

Remarque. 1. L'inconvénient majeur de ceci est la nécessité de devoir calculer tous les termes précédents celui d'intérêt.

2. En considérent $g(x) = 2x - 2$ la suite définie ci-dessus peut s'écrire $u_{n+1} = g(u_n)$, $n \geq 1$ et $u_0 = 5$.

Représentation graphique

La représentation graphique d'une suite définie par récurrence se fait en deux temps. Il faut tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto x$ ainsi que celui de la fonction g utilisée pour définir la suite. Voyons comment faire à l'aide d'un exemple.

Exemple 3.2.4. Soit g la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x+1}$ et (C_g) sa courbe représentative. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) = \sqrt{u_n + 1} \quad n \geq 1, \\ u_0 = -0,8. \end{cases}$$

Pour obtenir une réprésentation graphique de cette suite, il faut suivre la méthode décrite ci-dessous.

1. Tracer (C_g) et la droite d'équation $y = x$ sur $[1; 4]$ dans un repère orthonormé (unité 5 cm) et u_0 sur l'axe des abscisses.

2. Utiliser la courbe (C_g) pour obtenir le terme u_1 à partir de u_0, puis la droite $y = x$ pour reporter la valeur obtenue de $u1$ sur l'axe des abscisses.

3. Recommencer l'étape précédente pour obtenir les termes suivants.

Exercice 2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} v_{n+1} = 2v_n - 1, \; n \geq 1 \\ v_0 = 2. \end{cases}$$

3.3 Suites usuelles

Dans cette section nous allons présenter la définition de certaines suites usuelles.

3.3.1 Suites arithmétiques

Il s'agit probablement d'une des suites les plus simples à étudier : elles se définissent par récurrence et l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant systématiquement le même nombre réel r. Formellement voici la définition des suites arithmétiques.

Définition 3.3.1. *Une suite arithmétique est définie par le relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r & n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le réel r est appelé la raison de la suite.

Exemple 3.3.1. 1. La suite $u_0 = 1$, $u_1 = 6$, $u_2 = 11$, $u_3 = 16, \ldots$ est arithmétique de raison 5.

2. La suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3 & n \geq 0, \\ u_0 = 10 \end{cases}$$

   est arithmétique de raison -3.

3. La suite des entiers naturels impairs est arithmétique de raison 2.

Remarque. Remarquons le fait suivant : une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique si et seulement si la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante (et ne dépend pas de n) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la constante obtenue est la raison de la suite.

Exemple 3.3.2. 1. Considérons la suite définie par $u_n = 3n - 2$ et montrons qu'il s'agit d'une suite arithmétique de raison 3. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 2 - (3n - 2) \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3. \end{aligned}$$

   Nous avons donc bien montré que la suite est arithmétique de raison 3.

2. Il est important d'avoir à l'esprit que de nombreuses suites ne sont pas arithmétique. Cela consiste à observer que la différence entre u_{n+1} et u_n n'est pas constante et dépend de n. Par exemple, étudions la suite définie par $v_n = n^2$, $n \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

   Cette suite n'est donc pas arithmétique.

Le résultat suivant montre qu'il est possible d'exprimer une suite arithmétique en fonction de n plutôt que par une relation de récurrence.

Proposition 10. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, alors*

$$u_n = u_0 + nr \quad n \geq 0$$

Remarque. La réciproque est vraie. Il est parfois utile d'utiliser la formule suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

Démonstration. La démonstration se fait de proche en proche : en exprimant u_n en fonction du terme qui le précède, puis en exprimant u_{n-1} en fonction de u_{n-2}. Le résultat s'ensuit en cumulant ces différentes égalités. □

Exemple 3.3.3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 7$. D'après la proposition précédente, nous avons l'expression suivante

$$u_n = 7 - 2n, \quad n \geq 0.$$

Notons que cette expression permet de calculer plus facilement la valeur de $u_{50} = 7 - 2 \times 50$ sans avoir à calculer les termes précédents $u_1, \ldots, u_{49}$ à l'aide de la relation de récurrence.

3.3.2 Suites géométriques

Voici un autre exemple de suite usuelle, cette fois-ci le terme suivant est obtenu en multipliant systématiquement le terme précédent par le même nombre réel q. Autrement dit :

Définition 3.3.2. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si*

$$u_{n+1} = q \times u_n, \quad n \geq 0$$

Exemple 3.3.4.
1. la suite $u_1 = 2$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_4 = 8, \ldots$ est géométrique de raison 2.

2. la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n & n \geq 0, \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

   est arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.

3. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est géométrique de raison -1.

Remarque. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique si et seulement si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant pour tout entier n. Dans ce cas, la constante obtenue est la raison q de la suite.

Exemple 3.3.5. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 5 \times 3^{n+2}$. Il est évident que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+3}}{5 \times 3^{n+2}} = 3.$$

Nous avons donc montré que la suite est géométrique de raison 3.

Similairement au cas des suites arithmétiques, il est possible d'obtenir une expression en fonction de n d'une suite géométrique. Plus précisément,

Proposition 11. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, alors l'expression suivante est satisfaite*

$$u_n = u_0 \times q^n, \quad n \geq 0.$$

Remarque. La réciproque est vraie. De plus, il peut-être utile d'avoir en tête la formule suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Démonstration. Même type de démonstration que pour le suites arithmétiques. □

3.3.3 Expression des sommes partielles

Il sera parfois utile d'avoir une formule permettant de calculer la sommes des n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$. Formellement, nous souhaitons une formule pour

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \quad ?$$

Remarque. Le symbole $\sum$ est un moyen d'alléger les notations en écrivant de manière condensée une somme. L'indice de sommation dans l'exemple précédent est k et celui-ci débute à 0 et se termine à n, nous fournissant donc la somme de tous les termes u_k (qui apparait derrière le symbole $\sum$) se trouvant entre $k = 0$ et $k = n$.

Proposition 12. *La formule suivante est satisfaite :*

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Remarque. Une légende raconte que la démonstration de ce résultat avait été trouvé, de manière pragmatique, par Gauss à l'âge de 8 ans.

Démonstration. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$ et posons l'addition de $S_n = 1 + \ldots + n$ avec la même somme dans laquelle nous avons inversé l'ordre des termes (i.e. $S_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$). Ceci nous fournit n paquets de $(n+1)$. Autrement dit,

$$2S_n = n(n+1)$$

d'où le résultat. □

En conséquence, cette proposition permet de calculer la somme des $(n+1)$ termes d'une suite géométrique.

Corollaire 13 (Somme de termes d'une suite arithmétique)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite arithmétique de raison* $r \in \mathbb{R}$ *alors*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2}$$

Voici une proposition similaire servant pour les suites géométriques.

Proposition 14 (Somme de termes d'une suite géométrique)**.** *Soit* $q \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $q \neq 1$ *alors* $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2. *Si* $q = 1$ *alors* $S_n = n + 1$.

Démonstration. La deuxième assertion est triviale. Démontrons la première. Observons que $qS_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$. Ainsi, nous en déduisons que

$$S_n - qS_n = 1 + q + q^2 + \dots q^n - (q + q^2 + \dots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$$

Autrement dit, $(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$ d'où la conclusion puisque, par hypothèse, $1 - q \neq 0$. □

3.4 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Savoir calculer et représenter graphiquement les termes d'une suite à partir d'une formule explicite ou d'une définition pas récurrence.

- Identifier et démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique (ou ni l'une ni l'autre).

- Savoir utiliser de manière adéquate les différentes formules de représentation d'une suite arithmétique ou géométrique.

- Maitriser les résultats portant sur les différentes formules de sommes partielles.

3.5 Pour aller plus loin

3.5.1 Nombre d'or, suite de Fibonnaci, pavage de Penrose

Historiquement, il semblerait que le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ait été initialement défini l'unique rapport $\frac{a}{b}$ entre deux longueurs a et b telles

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Le nombre d'or peut aussi être obtenu comme étant une racine de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0$$

La suite de Fibonacci permet de décrire, de manière grossière, la croissance de population de lapins. Cette suite doit son nom au mathématicien italien Fibonacci (1175 − 1250). La définition de celle-ci est faite par récurrence et porte exprime le terme u_{n+2} en fonction des deux termes qui le précèdent (nécessitant ainsi la donnée des deux premiers termes).

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n & n \geq 2, \\ u_0 = 1,\ u_1 = 1. \end{cases}$$

Cette suite est notamment célèbre dans la culture populaire au travers, entre autres, du roman *Da Vinci Code* de D. Brown mais aussi par son apparition dans le tableau *Parade de cirque*, peint en 1887 − 1888, de G. Seurat. Cette suite entretient également des liens avec le célèbre nombre d'or ϕ. En effet, il est possible de montrer que le quotient de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci se rapproche de plus en plus du nombre d'or à mesure que n se rapproche de l'infini.

Le nombre d'or est également utilisé dans la construction de pavage de Penrose.

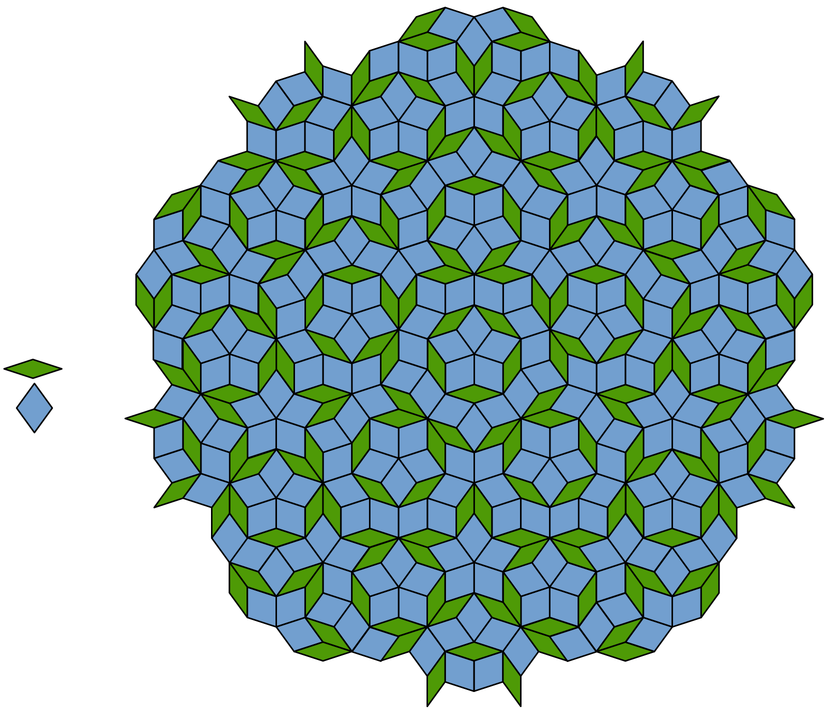

FIGURE 3.1 – Pavage de Penrose

Ces pavages du plan découverts par le mathématicien et physicien britannique Roger Penrose dans les années 1970. En 1984, ils ont été utilisés comme un modèle intéressant de la structure des quasi-cristaux (il s'agit de solides dont le spectre de diffraction est essentiellement discret et dont l'arrangement des atomes n'est pas périodique). La construction de tels objets mathématiques s'obtient grâce à des suites définies par récurrence.

3.5.2 Conjecture de Syracuse

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie, par récurrence à partir d'un entier $u_0 \in \mathbb{N}$, de la manière suivante

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si} \quad u_n \quad \text{est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si} \quad u_n \quad \text{est impair} \end{cases}$$

Exemple 3.5.1. Si $u_0 = 14$, nous obtenons la suite des nombres :

$$14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

Remarque. La suite de nombre $1, 4, 2, 1, 4, 2, \ldots$ se répète indéfiniment, il usuel de désigner ceci sous le nom de « cycle trivial ».

La conjecture de Syracuse, ou conjecture d'Ulam, est l'hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1. Autrement dit, peut-importe la valeur de départ, à partir d'un certain rang, la suite atteint le cycle trivial $1, 4\,2\,1, \ldots$.

En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années (au moins depuis 1928) les mathématiciens. D'ailleurs, le mathématicien Paul Erd ?s $(1931 - 1996)$ a dit à propos de la conjecture de Syracuse : « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes ».