Chapitre 3

Equations, inéquations du second degré

Poursuivons l'étude du second degré entamée au premier chapitre.

3.1 Résolution d'équations du second degré

Désignons par (E) l'équation du second degré suivante :

$$(E) : \quad ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \text{ et } (b,c) \in \mathbb{R}^2$$

et notons f la fonction associée.

Définition 3.1.1. *Les solutions de l'équations (E) sont appelées racines de f.*

Remarque. Nous verrons un peu plus tard que celles-ci, lorsqu'elles existent, correspondent géométriquement aux points d'intersections de la courbe C_f (associée au polynôme f) avec l'axe de abscisses.

Nous allons voir que la forme canonique introduite précédemment et le signe du discriminant Δ permettent de savoir s'il existe des racines réelles et d'obtenir une expression de celles-ci.

Proposition 8 (Résolution d'équation d'ordre deux)**.** *Avec les notations précédentes, trois cas de figure se présentent à nous :*

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux racines, réelles, distinctes*

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad et \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle (dite double)*

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

3. *Enfin, si $\Delta < 0$, l'équation (E) n'admet aucune racine réelle.*

Remarque. Lorsque $\Delta = 0$, cela signifie qu'il était possible d'utiliser une identité remarquable pour résoudre l'équation (E) et qu'il n'était pas utile de calculer le discriminant. En classe de Terminale S, vous verrez qu'il est possible de trouver, avec un peu d'imagination, des solutions (dans un contexte plus large) à l'équation (E) lorsque $\Delta < 0$.

Démonstration. Soit f un polynôme du second degré, rappelons qu'il est possible d'exprimer f sous sa forme canonique :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{avec} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Ainsi, la résolution de l'équation (E) est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

1. Supposons, dans un premier temps que $\Delta > 0$. Alors, $\sqrt{\Delta}$ existe et l'équation précédente peut s'écrire comme suit :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

   Il est alors possible d'utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ qui nous fournit

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

   Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) S s'exprime de la manière suivante :

$$S = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\} = \left\{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

2. Supposons à présent que $\Delta = 0$. En reprenant les calculs précédents, la résolution de l'équation (E) est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

   Il est alors aisé de déterminer l'ensemble des solutions S :

$$S = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\} = \left\{x_0 = \frac{-b}{2a}\right\}$$

3. Enfin, si $\Delta < 0$, l'équation (E) est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

   Pour conclure, il suffit d'observer que le membre de droite est strictement négatif (par hypothèse $\Delta < 0$) tandis que le membre de gauche est positif ou nul (il s'agit d'un carré). En conséquence, il ne peut pas exister de solutions réelles (si elles existaient, nous aurions une contradiction).

□

Exemple 3.1.1. Résolvons les équations suivantes à l'aide, si nécessaire, de la proposition précédente :

1. $x^2 - 2x - 15 = 0$

2. $x^2 + x + 1 = 0$

3. $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Exemple 3.1.2 (Exercice DM)**.** Proposer un algorithme (en python) permettant de résoudre une équation du second degré à partir d'un polynôme du second degré donné.

3.2 Signe d'un polynôme du second degré

Le lecteur attentif aura remarquer que la démonstration de la proposition précédente nous permet d'obtenir une forme factorisée du polynôme f lorsque $\Delta \geq 0$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant qui nous permet de déterminer le signe d'un polynôme du second degré en fonction du signe de son coefficient dominant (le coefficient apparaissant devant le terme en x^2).

Proposition 9 (Factorisation d'un polynôme du second degré)**.** *Dans le même contexte, nous avons les factorisations suivantes du polynôme f :*

1. *Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec x_1 et x_2 les racines de f.*

2. *Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x - x_0)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec x_0 la racine double de f.*

Remarque. Lorsque $\Delta < 0$, il n'est pas possible de factoriser (dans $\mathbb{R}$) le polynôme f.

Lorsque le polynôme est sous forme factorisée, il est alors possible de dresser un tableau de signe.

Corollaire 10. *Sous le contexte précédent, pour tout réel x, nous avons les résultats suivants :*

1. *Lorsque $\Delta > 0$ et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$ (par exemple) les deux racines du polynôme, nous avons le tableau de signe suivant :*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	0	*$-$signe de a*	0	*signe de a*	

2. *Lorsque $\Delta = 0$ et $f(x) = a(x - x_0)^2$ avec x_0 la racine double de f, nous avons*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	0	*signe de a*	

3. *Lorsque $\Delta < 0$, le polynôme f ne s'annule jamais et nous avons*

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	*signe de a*	

Démonstration. La démonstration de ce résultat repose sur les formes factorisées, du polynôme f, obtenues via la forme canonique et le signe du discriminant. A partir de celles-ci, il est facile de dresser un tableau de signe pour chaque cas de figure.

1. Si $\Delta > 0$, nous avons

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		signe de a	0	$-$signe de a	0	signe de a	

2. Si $\Delta = 0$ nous avons $f(x) = a(x - x_0)^2$. Observons alors que $f(x_0) = 0$ et que $(x - x_0)^2 > 0$ si $x \neq x_0$ pour conclure.

3. Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de factorisation de f permettant de dresser un tableau de signe. Cependant, la forme canonique de f va nous permettre de conclure. En effet, celle ci nous fournit l'expression suivante

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observons alors que $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ (puisque $\Delta < 0$) et $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Ce qui nous permet d'en déduire que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Ainsi, le signe de f est dicté par celui du coefficient dominant a.

□

Exemple 3.2.1. 1. Déterminons le signe du polynôme $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Résolvons l'inéquation $3x - 4 + \frac{5}{x} < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_*$.

Comme nous le verrons, de nombreux problèmes (géométriques, d'optimisation, ...) peuvent se ramener à une étude de signe d'un polynôme du second degré. Il est primordial d'avoir les résultats de ce chapitre en tête tout au long de l'année.

3.3 Relation entre coefficients et racines

Regardons un exemple pour voir de quoi il retourne.

Exemple 3.3.1. Soit $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et remarquons que $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$. Maintenant, déterminons les racines de P. Ici, $\Delta = 1 > 0$: il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = 1$$

Observons le fait suivant : $x_1 + x_2 = \frac{3}{2} = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{1}{2} = \frac{c}{a}$. il se trouve que ce résultat est complètement général.

Proposition 11 (relation coefficients/racines)**.** *Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *x_1 et x_2 sont des racines distinctes de P*
- *x_1 et x_2 sont solutions du système suivant*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Remarque. Nous venons d'exprimer les coefficients d'un polynôme unitaire P en fonction de polynômes symétriques en les racines. Ce phénomène est complètement général et n'est pas limité au second degré.

Avant de passer à la démonstration, voyons à quoi cela peut servir à l'aide de deux exemples.

Exemple 3.3.2. 1. Imaginons que nous souhaitions résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \times x_2 = 3 \end{cases}$$

Autrement dit, nous souhaitons trouver la valeur de x_1 et x_2. Pour cela, il suffit d'utiliser la proposition précédente. Celle-ci nous assure que x_1 et x_2 sont les racines d'un polynôme dont les coefficients sont déterminés par les nombres -4 et 3 apparaissant dans le système ci-dessus. Forcément, devons choisir

$$a = 1 \quad ; \quad b = 4 \quad ; \quad c = 3$$

Ainsi, x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2 + 3x + 4 = 0$. Il ne reste plus qu'à utiliser Δ pour trouver leur valeur.

2. L'exemple précédent semble un peu artificiel. Voici une autre application.

Considérons le polynôme $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Il n'est pas difficile d'observer que $x = 1$ est une racine de P. En effet, $P(1) = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0$. Lorsque que nous constatons que valeur simple (comme $x = \pm 1$, $x \pm 2$ ou $x = 0$) est solution d'une équation, il est usuel de parler de racine évidente. A présent, nous pouvons facilement obtenir la valeur de la deuxième racine et cela sans utiliser Δ.

En effet, d'après la proposition 11, nous savons que le produit des racines $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$. Dans notre exemple, cela signifie que

$$1 \times x_2 = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

Nous avons donc calculer très facilement la valeur de x_2 à partir de celle de x_1 grâce à la proposition 11 sans employer Δ. Le gain de temps est considérable.

Passons à la démonstration de la proposition 11.

Démonstration. D'une part, sous sa forme développée, nous avons $P(x) = ax^2 + bx + c$. D'autre part, sous sa forme factorisée, nous avons $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Nécessairement, puisque ces deux expressions désignent la même quantité $P(x)$, nous avons

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Nous allons donc développer l'expression factorisée pour ensuite **identifier** les coefficients entre eux (ceux des x^2 ensemble, ceux des x ensemble, puis les constantes ensembles). Nous avons donc

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2] = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2$$

En identifiant les coefficients, nous trouvons donc

$$\begin{cases} a = a & \textit{coefficients des} \quad x^2 \\ b = -a(x_1 + x_2) & \textit{coefficients des} \quad x \\ c = ax_1 x_2 & \textit{constantes} \end{cases}$$

Autrement dit, après simplifications par $-a$, nous avons

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = (x_1 + x_2) \\ \frac{c}{a} = x_1 x_2 \end{cases}$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

3.4 Factorisation d'un polynôme de degré 3

Nous allons voir que le concept de racine évidente et d'identification permet de résoudre des équations de degrés supérieurs en factorisant le polynôme. Voyons plutôt à travers un exemple.

Exemple 3.4.1. Imaginons que nous souhaitions résoudre

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$$

Observons que $x = -1$ est une racine évidente du polynôme $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$. En effet,

$$P(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 + 2 \times (-1) + 8 = -1 - 5 - 2 + 8 = 0$$

Ainsi, nous savons P peut se factoriser sous la forme $P(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$ avec des constantes a, b et c à déterminer. Nous pouvons à présent développer cette nouvelle expression pour ensuite identifier les coefficients.

$$P(x) = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c = ax^2+(a+b)x^2+(c+b)x+c$$

Forcément, nous devons avoir

$$1x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = ax^3 + (a+b)x^2 + (c+b)x + c$$

Il ne reste plus qu'à **identifier** les coefficients.

$$\begin{cases} 1 = a \\ -5 = a+b \\ 2 = c+b \\ 8 = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases}$$

Ainsi, $P(x) = (x+1)(x^2-6x+8)$. Nous pouvons à présent utiliser Δ pour trouver les racines éventuelles de x^2-6x+8. Ici, $\Delta = 4 > 0$ et

$$x_1 = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = 2.$$

Finalement, $P(x)$ se factorise sous la forme

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x-4)$$

et l'équation $P(x) = 0$ admet 3 solutions : $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = 4$.

Remarque. D'une certaine manière, nous venons d'effectuer la division euclidienne de x^3-5x^2+2x+8 par $x+1$.

3.5 Exercices potentiels

- Calcul discriminant : exercices $21p97$.
- Résolution équations et inéquations : exercice $23, 25page97$ et $57page100$
- Factorisation et racines : exercices $29, 31p98$.
- Racines et coefficients : exercices $27, 28p98$.
- Représentation graphique : exercices $40p99$.
- Applications : exercice $45, 56p99$.
- DM : equation bicarrée et avec paramètre ($61p100$ et $76p104$)

En complément, il pourra être demander de mobiliser les connaissances précédentes pour :

- Utiliser un changement de variable pour résoudre une équation de degré supérieur.
- Résoudre des problèmes d'optimisation de distance, d'aire, etc ...

3.6 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Recherche des racines d'un polynôme du second degré f (solutions de l'équation $f(x) = 0$).
- Forme canonique, développée et factorisée d'un polynôme de degré 2 f.
- Signe d'un polynôme du second degré f avec résolution d'inéquations.
- Variation d'un polynôme du second degré f et extrema (minimum ou maximum) avec ses coordonnées.
- Représentation graphique complète.
- Position relative de deux courbes du premier et/ou second degré.

En complément, il pourra être demander de mobiliser les connaissances précédentes pour :

- Utiliser un changement de variable pour résoudre une équation de degré supérieur.
- Résoudre des problèmes d'optimisation de distance, d'aire, etc ...

3.7 Pour aller plus loin

Pour les plus curieux, voici deux problèmes facultatifs (bien évidemment hors programme) donnant des pistes de résolutions d'équations de degré supérieur.

3.7.1 Méthode de Cardan (publiée dans l'Ars Magna en 1545)

Longtemps après les travaux d'Al-Khwarizmi, des mathématiciens italiens se sont penchés sur la résolution d'équation de degré trois. L'un des premiers fut Scipione del Ferro en 1515, suivit de son élève Tartaglia en 1535 et enfin le mathématicien Cardan (1545). Ce genre de recherche pouvait être motiver, entre autres, pour être appliquer à des problèmes de ballistiques. Il est à noter qu'à l'époque ce genre d'exercices n'en était qu'à ses balbutiements et qu'il était prestigieux de découvrir des méthodes de résolutions. La recherche de ce prestige entraina bien sûr des rancoeurs et des querelles quant à la paternité d'une découverte, ce fut notamment le cas entre Tartaglia et Cardan.

Voyons à présent une équation de degré trois :

$$(\tilde{E}) : \quad z^3 - 15z - 4 = 0$$

Voici quelques indications pour déterminer les trois racines réelles de ce polynôme :

- Connaissant les racines x_1 et x_2 du polynôme $f(x) = x^2 + bx + c$, est-il possible d'exprimer les coefficients b et c en fonction de ces racines ?

- Il pourra être utile de chercher les racines de $(\tilde{E})$ sous la forme $z = u + v$ en imposant la condition $u^3v^3 = \frac{15^3}{27}$. *Indication : il faut obtenir un système d'équations, l'une d'elles impliquant la somme $u+v$, l'autre le produit uv, afin d'utiliser les résultats du premier point.*

- En essayant de résoudre l'équation du second degré obtenu au point précédent, tout comme la mathématicien Bombelli (1526-1572), il faudra faire preuve d'un peu d'imagination pour résoudre ce problème quitte à écrire des choses qui semblent fausses (voir même absurdes) dans un premier temps.

3.7.2 Méthode de Ferrari (1522-1565)

Elève de Cardan, ce mathématicien s'est penché sur les équations de degré quatre. Essayons de résoudre l'équation suivante :

$$(\hat{E}) : \quad x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 10 = 0$$

Voici quelques indications pour déterminer les deux racines réelles de ce polynôme :

- Procéder à un changement de variable en posant $x = z - 1$ afin d'obtenir une nouvelle équation $(\hat{E}_1)$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre à choisir ultérieurement. En utilisant le fait que $z^4 = (z^2+\lambda)^2 - 2\lambda z - \lambda^2$, obtenir une nouvelle équation de la forme
$$(z^2+\lambda)^2 = P(z)$$
avec $P(z)$ un polynôme de degré 2 dont les coefficients dépendent de λ.
- Chercher un moyen de factoriser ce nouveau polynôme P sous la forme de carré en utilisant le discriminant. Il pourra être utile d'observer que la condition permettant cette factorisation s'écrit sous la forme d'une équation de degré trois (d'inconnue λ) dont il est possible d'obtenir une racine évidente.

3.7.3 Dernières remarques

Les indications précédentes sont laissées volontairement floues, l'idée derrière cela est d'essayer de vous faire découvrir de quelle manière les mathématiciens (de l'époque mais aussi de nous jours) procèdent lorsqu'ils essaient de résoudre un problème. La solution survient souvent après de longs tâtonnements et de nombreux essais infructueux.

Comme souvent, obtenir une réponse à une question donnée soulève de nouvelles problématiques. A titre d'exemples, voici quelques questions qui pourraient survenir après ces deux challenges :

1. Comment traiter les cas généraux ? De quelle manière serait-il possible de généraliser les méthodes précédentes pour traiter, de manière formelle, les équations de degré trois et quatre comme nous l'avons fait de ce cours pour le degré deux ?

2. Dans le cours, nous avons vu que lorsque $\Delta < 0$ il n'existait pas de racines réelles. Existe-t-il des critères analogues pour les degrés supérieurs.
3. A votre avis, est-il toujours possible de résoudre une équation polynomiale de manière algorithmique (comme nous l'avons fait pour le degré deux en calculant Δ) et ceci peut importe le degré du polynôme considéré ?