Chapitre 3

Coordonnées d'un point du plan

3.1 Historique

3.2 Coordonnées dans le plan

Comme nous allons le voir, associer des coordonnées à un point du plan permet de traiter, plus simplement, de manière algébrique des problèmes géométriques. Pour définir des coordonnées, il est important d'introduire un repère.

Définition 3.2.1. *Définir un repère du plan consiste à choisir* 3 *points, distincts, non-alignés dans un ordre précis :* O, I, J. *Le repère est alors noté* (O, I, J). *et :*

- *le point* O *est appelé origine du repère ;*
- *la droite* (OI) *est l'axe des abscisses et le point* I *donne l'unité sur cet axe ;*
- *la droite* (OJ) *est l'axe des ordonnées et le point* J *donne l'unité sur cet axe.*

Remarque. 1. Bien que l'axe des abscisses soit souvent horizontales, ce n'est pas une obligation.

2. Lorsque le triangle OIJ est rectangle en O, le repère (O, J, I) est dit orthogonal et les axes du repère sont perpendiculaires.

3. Lorsque le triangle OIJ est rectangle-isocèle en O, le repère (O, J, I) est dit orthonormée. Les axes du repère sont perpendiculaires et l'unité de mesure est la même sur chaque axe.

Voyons à présent de quelle manière attribuer des coordonnées à un point du plan une fois qu'un repère ait été choisi.

Définition 3.2.2. *Soit* (O, I, J) *un repère du plan et* M *un point quelconque.*

- *En traçant la parallèle à* (OJ) *passant par* M, *nous obtenons l'abscisse* x_M *du point* M *sur l'axe* (OI).

- *En traçant la parallèle à* (OI) *passant par* M, *nous obtenons l'ordonnée* y_M *du point* M *sur l'axe* (OJ).

- *Le couple de réels* (x_M, y_M) *est le couple de coordonnées du point* M *dans le repère* $(O; I; J)$.

Comme nous le verrons par la suite, l'introduction d'un repère dans une figure fournit un outil supplémentaire pour faire de la géométrie. Nous reverrons, en exercice, de quelle manière procéder et comment les coordonnées cartésiennes permettent de revisiter certains résultats vu au collège.

3.3 Coordonnées du milieu d'un segment

A partir de deux points du plan A et B, voyons comment déterminer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.

Proposition 6. *Considérons le plan muni d'un repère* $(O; I; J)$ *ainsi que des points* $A(x_A; y_A)$ *et* $B(x_B; y_B)$. *Le milieu* M *du segment* $[AB]$ *a pour coordonnée*

$$M(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$$

Remarque. Les coordonnées du point M correspondent à la moyenne arithmétique des coordonnées des points A et B.

Voyons ceci sur un exemple.

Exemple 3.3.1. Dans un repère du plan, considérons les points suivants

$$A(1; -2), \quad B(-3; 0) \quad \text{et} \quad C(-1; 2).$$

1. Le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1.$$

   Autrement dit, $K(-1; -1)$.

2. Le symétrique de B' de B par rapport au point C, est tel que C est le milieu du segment $[BB']$. Ses coordonnées vérifient donc :

$$\frac{x_{B'} + x_B}{2} = x_C \quad \text{et} \quad \frac{y_{B'} + y_B}{2} = y_C.$$

   D'où $x_{B'} = 2x_C - x_B = -2 - (-3) = 1$ et $y_{B'} = 2y_C - y_B = 4$. C'est à dire, $B'(1; 4)$.

3.4 Calcul de distance dans un repère *orthornormée*

Dans un repère ***orthonormée*** il est possible d'utiliser les coordonnées pour calculer des distances. Pour cela, nous devrons utiliser la fonction racine carrée dont nous rappelons ci-dessous quelques propriétés.

3.4.1 Rappels sur la fonction racine carrée

Nous noterons cette fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Celle-ci est définie comme suit : étant donné un nombre $b \geq 0$, nous dirons qu'un nombre $a \in \mathbb{R}$ est la racine carré de b si $a \times a = a^2 = b$. De manière un peu grossière, cette fonction permet de « défaire le carré d'un nombre ». D'un point de vue plus géométrique, cela revient à déterminer le côté d'un carré lorsque nous connaissons l'aire de celui-ci.

Exemple 3.4.1.

1. Si $b = 4$, il est facile de constater que le choix de $a = 2$ convient. En effet, $a \times a = 2 \times 2 = 4$ donc $\sqrt{4} = 2$. Observons également que le choix de $a = -2$ est également possible puisque $(-2) \times (-2) = 4$. Ce curieux phénomène provient du fait suivant : déterminer la racine carrée de 4 revient à chercher les solutions de l'équation

$$x^2 = 4$$

Bien entendu, cette équation s'écrit également sous la forme

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2)(x-2) = 0$$

où nous avons utilisé l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Il convient alors d'utiliser la règle du produit nul pour trouver l'ensemble des solutions suivant : $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$ qui vérifient l'équation $x^2 = 4$. Il est important procéder ainsi pour ne pas oublier l'une des deux solutions. En pratique, lorsque nous ferrons de la géométrie et calculerons des distances, la racine négative sera régulièrement exclue car une telle valeur ne peut correspondre à une longueur.

2. De manière similaire, nous pourrions calculer les racines carrées de $b = 9$ ou $b = 36, \ldots$
3. Parfois, il ne sera pas possible de simplifier nos calculs pour obtenir un nombre entier. A titre d'exemple, la raciné carrée (positive) de 2 s'écrira $\sqrt{2}$ et nous ne pourrons pas l'exprimer sous la forme d'une fraction de nombre entiers $\frac{n}{d}$ avec (n, d), $d \neq 0$ n'ayant aucun diviseur commun. En effet, si c'était le cas, nous aurions

$$\sqrt{2} = \frac{n}{d}$$

Ceci entraine, en élevant l'expression précédente au carré, que $2d^2 = n^2$. Ceci implique donc que n^2 est divisible par 2, en particulier n est aussi divisible par 2 (puisque, par contraposée, si n est impair alors n^2 est également impair). En définitive, $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, après substitution, nous obtenons donc que

$$2d^2 = 4k^2 \quad \Longleftrightarrow \quad d^2 = 2k^2$$

Autrement dit, d^2 est un multiple de 2 et le raisonnement précédent montre qu'en conséquence d est un nombre pair. En conclusion, nous avons donc montré que n et d sont des nombres pairs. Ceci est absurde car nous avons supposé qu'ils n'avaient aucun diviseurs commun. Ceci prouve donc que $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible. Le même type de démonstration reste valable, à quelques modifications près, si nous remplaçons 2 par un nombre premier (i.e un nombre uniquement divisible par lui même et par 1).

Pour conclure ces brefs rappels, voici une propriété importante permettant de simplifier des racines carrées.

Propriétés 2. Soient $a, b \geq 0$ alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Remarque. Attention, la propriété suivante n'est jamais vraie : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Pour s'en convaincre, il suffit de choisir $a = 16$ et $b = 9$. Avec un tel choix, nous avons bien d'un part $\sqrt{a+b} = \sqrt{25} = \pm 5$ tandis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \pm 4 \pm 3$.

Voici un exemple d'application de ce qui précède.

Exemple 3.4.2. 1. $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

2. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Cette propriété est notamment utile pour résoudre des équations lorsqu'il n'y a pas de carré parfait. Par exemple, avec ce qui précède,

$$x^2 - 12 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{3}$$

Nous reviendrons sur tout ceci plus en détails dans une leçon ultérieure.

3.4.2 Distance entre deux points du plan

Proposition 7. *Considérons le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ ainsi que des points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. La distance entre les points A et B vaut*

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

l'unité de longueur étant l'unité commune aux deux axes.

Remarque. Sans grande surprise, la présence du carré dans la formule permet de constater que $AB = BA$.

Démonstration. Le fait que le repère soit orthonormé est essentiel et permet d'appliquer le Théorème de Pythagore. Sans perdre en généralité, nous pouvons supposer que $x_A < x_B$ et $y_A > y_B$ (essentiellement, les autres cas de figures sont similaires). Soit E le point du plan ayant même abscisse que le point A et la même ordonnée que le point B. Les axes du repère étant orthogonaux, le triangle AEB est donc rectangle en E. Il est alors possible d'appliquer le Théorème de Pythagore, qui nous assure que

$$AB^2 = AE^2 + BE^2.$$

or $BE = x_B - x_A$ et $AE = y_A - y_B$. D'où, $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$. Une distance étant positive, nous en déduisons que

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

□

3.5 Propriétés géométriques : rappels du collège

Dans cette section nous rappelons quelques propriétés élémentaires qui seront utiles pour résoudre certain exercice.

Proposition 8. *Soient A, B et C trois points du plan. Ces points sont alignés si et seulement si $AB + BC = AC$.*

Théorème 9 (Pythagore)**.** *Soit ABC un triangle (non aplati). L'équivalence suivante est vérifiée :*

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \Longleftrightarrow \quad ABC \quad \textit{est un triangle rectangle en} \quad B$$

Voici quelques propriétés des parallélogrammes .

Proposition 10. *Soit $ABCD$ un quadrilatère.*

1. *$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont deux à deux parallèles.*

2. *$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.*

3. *$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont deux à deux de même longueur.*

Voici quelques propriétés des losanges.

Proposition 11. *Soit $ABCD$ un quadrilatère.*

1. *$ABCD$ est un losange si et seulement si ses côtés ont même longueur.*

2. *$ABCD$ est un losange si et seulement si ses diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu.*

Voici quelques propriétés des rectangles.

Proposition 12. *Soit $ABCD$ un quadrilatère.*

1. *$ABCD$ est un rectangle si et seulement il admet trois angles droits*

2. *$ABCD$ est un rectangle si et seulement si ses diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu.*

3. *Si $ABCD$ est un parallélogramme admettant un angle droit alors il s'agit d'un rectangle.*

Enfin, observons qu'un carré combine les propriétés des losanges et des rectangles. En conséquence, pour démontrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est un carré il suffit de prouver qu'il s'agit à la fois d'un losange et d'un rectangle.

3.6 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées.
- Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées.
- Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Utiliser les propriétés des triangles, des quadrilatères, des cercles.
- Utiliser les propriétés des symétries axiale ou centrale.

3.7 Pour aller plus loin

3.8 Curiosité en grande dimension

Il n'est pas vraiment possible pour l'être humain de se représenter un objet en quatre dimension (ou plus). Il est cependant possible de conceptualiser ce qui doit se produire. Imaginons que nous surplombions un monde vivant dans une feuille en papier, un monde en deux dimension. Si nous prenions un cube de notre univers, les habitants de ce monde ne pourraient l'apercevoir qu'au moment ou une partie du cube traverse la feuille de papier et pénètre dans leur monde. En faisant ceci, les habitants observeraient une tranche du cube et seraient face à un carré. Il n'est donc pas difficile de généraliser ce procédé en se disant que si des êtres nous observaient depuis un monde en quatre dimension et s'amusaient à vouloir nous montrer un cube de leur univers (en quatre dimensions) nous ne verrions qu'une tranche de celui-ci et ferions face à un cube normal.

Bien que notre intuition soit un peu gênée par des espaces de dimension supérieurs à trois, ces ensembles interviennent très rapidement lors de l'étude de certains problèmes. En effet, grossièrement, ajouter une dimension revient à considérer un paramètre supplémentaire. Par exemple, pour décrire le mouvement d'un oiseau nous avons besoin de connaître sa position dans l'espace. En revanche, il est possible que nous ayons également besoin de connaitre la durée de son mouvement, la pression atmosphérique, la température, etc ... la considération de ceci force à introduire plus de dimensions pour prendre en compte ces nouveaux paramètres. En statistiques, certains problèmes de modélisation comme la météorologie met en jeu plusieurs milliers de paramètres.

L'un des intérêts majeur des coordonnées cartésiennes est que nous pouvons étudier des choses qui dépasse notre imagination. En effet, pour ajouter une dimension il suffit d'ajouter une coordonnée à notre vecteur. Il devient donc possible de faire des calculs sur des choses que nous ne pouvons visualiser. Cela va parfois à l'encontre de notre intuition. Voyons ceci au travers d'un exemple.

Débutons dans le plan et considérons un carré de côté 2 dont le centre est placé en $(0,0)$.

Plaçons des disques de rayon 1 dans les zones suivantes : un premier disque centré au point $(1;1)$, un deuxième en $(1;-1)$, un autre en $(-1;1)$ et un dernier en $(-1;-1)$. Il est alors possible de placer un dernier diqque en $(0;0)$ puis de l'agrandir jusqu'à ce qu'il touche les quatre disques que nous avons disposer. dans le carré au préablable.

Bien sûr, il est possible de procéder de manière similaire dans l'espace. Cette fois-ci nous avons un cube de côté 2, 8 boules de rayon 1 centrées aux points $(\pm 1;\pm 1;\pm 1)$ et enfin une dernière boule placée en $(0;0;0$ dont le rayon est plus grand possible (avec pour condition que cette nouvelle boule ne puisse empiéter sur les autres).

A vrai dire, pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? Il n'est plus possible de faire de dessin mais nous pouvons imaginer un hypercube de côté 2 (que nous noterions $[-2;2]^d$) en dimension d et placer des boules aux points $(\pm 1;\ldots,\pm 1)$ comme auparavant pour enfin placer une dernière boule au centre avec les mêmes restrictions qu'auparavant.

A partir de quelle dimension cette dernière boule dépasse du cube $\quad [-2;2]^d$?

De manière intuitive, nous serions tenter de répondre : jamais ! Voyons ce que nous disent les calculs. Nous avons vu que la distance d'un point $M = (x_1;x_2)$ à l'origine valait

$$d(O,M) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

En dimension d, il s'agit de la même formule. C'est-à-dire, si M a pour coordonnées $(x_1;x_2;\ldots,x_d)$ (il n'est plus vraiment possible de parler d'abscisses ou d'ordonnées, nous numérotons donc les coordonnées par des nombres $x_1,\ldots,x_d$) nous avons la formule suivante :

$$d(O,M) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$$

Or, dans le problème que nous considérons les points M, centres des boules, ont des coordonnées de la forme $(\pm 1;\ldots;\pm 1$ donc $d(O,M) = \sqrt{d}$. Ainsi, puisque ces boules sont de rayon 1, cela entraine que le plus grand rayon possible pour la boule centrale vaut $\sqrt{d} - 1$. En conséquence, la boule centrale déborde du cube si

$$\sqrt{d} - 1 > 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad d > 9$$

ce qui n'était pas du tout intuitif. En fait, il est même possible de préciser ce résultat. Il s'agit d'un domaine des mathématiques qui s'appelle *la concentration de la mesure*. L'un des résultats de cette théorie permet d'affirmer que le volume de la boule centrale restant dans le cube s'approche très vite (exponentiellement vite) de zéro lorsque la dimension devient de plus en plus grande.

3.8.1 Distance

La distance que nous venons de voir s'appelle la distance euclidienne. Il existe d'autre façon de mesurer la distance entre deux points, l'une d'elle s'appelle la distance de « Manhattan » (en rapport avec le quartier de New-York). La raison derrière cette terminologie est la suivante : la plupart des villes américaines sont construites sur la forme d'un quadrillage. Ainsi, pour rejoindre un point A à un point B de la ville, nous sommes forcés de suivre ce quadrillage et d'arpenter les côtés des carrés de ce quadrillage. Ainsi, la distance calculée correspond à celle qui est effectivement parcouru à pied plutôt que celle obtenue « à vol d'oiseau ».

Formellement, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors

$$AB = |x_A - x_B + |y_A - y_B|$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue d'un nombre réel. Cette formulation n'engendre que très peu de différences notables avec la géométrie classique (grossièrement tout diffère d'une constante multiplicative universelle). En revanche, certain objets bien connu sont un peu modifiés. Pour voir cela nous devons adopter quelques notations : $d_2(A, B)$ pour désigner la distance euclidienne (celle vu en cours) entre deux points et par $d_1(A, B)$ pour la distance de Manhattan. Avec ces notations, il est possible de définir un disque de centre A et de rayon $r > 0$ comme étant l'ensemble des points M vérifiant :

$$d_2(A, M) \leq r$$

et nous obtiendrons la figure classique que vous avez pu rencontré au collège. En revanche, si nous remplaçons d_2 par d_1 dans le formule précédente, notre cercle prendra alors la forme d'un carré !

Il existe d'innombrables distances en mathématiques, chacune ayant une utilité, les quelques mots précédents ne font qu'effleurer la surface de cette notion.

3.8.2 Pythagore

Durant votre scolarité du collège, le théorème de Pythagore fut, sans doute, l'un des résultats qui a occupé une grande partie du programme. Il est même fort possible que votre professeur ait proposé une démonstration permettant de vous assurer que l'énoncé de ce théorème était vrai. Néanmoins, votre professeur, a sûrement du omettre une chose fondamentale à son propos. Ma question est donc la suivante :

le théorème de Pythagore est-il tout le temps vrai ?

Cette question peut sembler incongrue, pourtant elle mérite quelques mots. Votre professeur du collège a du présenter le théorème de Pythagore et dessiner des triangles sur le tableau noir de la salle de cours. Implicitement, cela signifie que ses dessins sont fait sur une surface plane ! A votre avis, le théorème de Pythagore est-il encore vrai si nous dessinions nos triangles sur un ballon ? ou à l'intérieur d'un bol ?

La réponse à ces questions est négative ! D'ailleurs, il est même possible de construire, sur un un ballon, un triangle possédant 3 angles droits ! En d'autres termes, cette remarque signifie qu'il existe d'autre géométrie que celle d'Euclide (étudiée au collège, puis au lycée). Grossièrement, il y a aussi la géométrie sphérique (celle-ci pouvant être visible à l'échelle de la Terre, permettant aux avions d'effectuer des vols optimaux entre Paris et Tokyo) et la géométrie hyperbolique. Bien sûr, il existe d'autres géométries que celles que nous venons d'énoncer (bien qu'il s'agisse des principales). Par exemple, la géométrie qui a permis au physicien Albert Einstein de formaliser sa théorie de la relativité repose sur une géométrie dite « pseudo-riemannienne ».