Chapitre 1

Probabilités conditionnelles

1.1 Introduction

1.2 Dépendance et indépendance

Parfois certain évènements ont un impact sur d'autres : par exemple, qu'elle est la probabilité que vous preniez un parapluie si la météo annonce de la pluie ? De manière intuitive, le fait de savoir qu'il risque d'y avoir de la pluie va influencer notre décision de prendre un parapluie. Voyons un autre exemple plus terre à terre.

Exemple 1.2.1. Imaginons que nous lancions un dé équilibré à 6 faces. Sachant que nous avons obtenu un nombre impair, quelle est la probabilité d'avoir obtenu le nombre 3 ? A nouveau, de manière intuitive, il est tentant de répondre : si le résultat obtenu est impair, cela ne laisse que 3 possibilités. Parmi ces possibilités, une seule correspond à la face 3. Autrement dit, la probabilité recherchée vaut $\frac{1}{3}$.

Voyons de quelle manière cela peut se formaliser.

Définition 1.2.1. *Soit Ω un espace probabilisé et considérons deux évènements A et B tels que $\mathbb{P}(A) > 0$. Nous appelons probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre, noté $\mathbb{P}_A(B)$, défini par*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Remarque. De manière intuitive, ce nombre correspond à la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A s'est déjà réalisé. Lorsque $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, il est parfois utile d'observer que les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A). \tag{1.2.1}$$

Maintenant que nous venons d'introduire la notion de dépendance entre deux évènements, il est naturel de s'interroger quant à la notion d'indépendance. C'est-à-dire, lorsque la réalisation de l'évènement A n'influe pas sur la réalisation de l'évènement B.

Définition 1.2.2. *Deux évènements A et B d'un espace probabilisé Ω sont dit indépendants lorsque*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Remarque. D'après l'identité (1.2.1), lorsque A et B sont indépendants nous avons $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$, ce qui correspond bien à notre intuition.

Exercices à traiter : 14 et 17 page 184 ; 44 page 188.

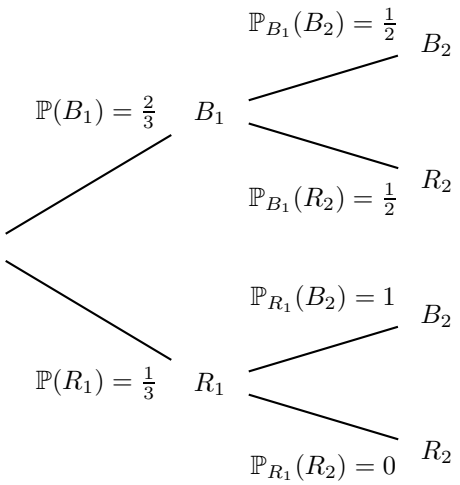
1.3 Représentation graphique

Il est plutôt pratique de représenter les probabilités conditionnelles à l'aide d'arbre pondéré. Voyons plutôt sur l'exemple suivant :

Exemple 1.3.1. Imaginons que nous ayons à disposition une urne contenant 3 boules, dont deux bleues et une rouge. Nous effectuons alors deux tirages successifs, sans remise, et considérons les deux évènements suivants :

B_i : obtenir une boule bleue au ième tirage et R_i : obtenir une boule rouge au ième tirage.

De manière graphique, cette expérience aléatoire (dans laquelle il est supposé que les boules sont indiscernables au touché) se représenterait de la façon suivante :



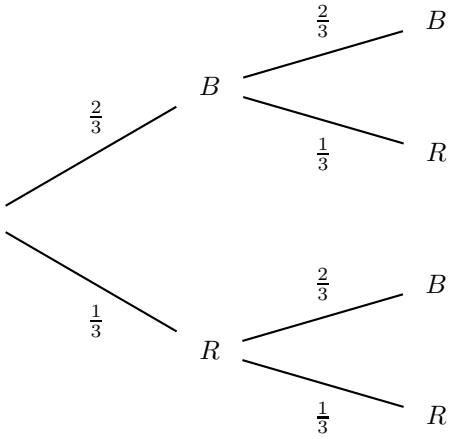
Au premier embranchement, les poids au dessus des branches correspondent à la probabilité des évènements B_1 et R_1. Nous noterons au passage que la somme de ces poids vaut 1 (comme à chaque embranchement). A partir du deuxième embranchement, les probabilités sont des probabilités conditionnelles. En particulier, celles-ci indiquent le chemin suivi au premier embranchement.

Il est important de noter que la probabilité d'un chemin s'obtient en multipliant les poids des branches composant le chemin. Par exemple, la probabilité d'obtenir une boule bleue, puis une rouge vaut

$$\mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Il est à noter que $\mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap R_2)$. Autrement dit, le produit des poids d'un chemin correspond à la probabilité de l'intersection des évènements apparaissant sur le chemin.

Bien entendu, si l'expérience se faisait avec remise, nous aurions dresser l'arbre suivant pour lequel les mêmes règles de calculs s'appliquent ; cette fois-ci B désigne l'évènement « obtenir une boule bleue » et R, l'évènement « obtenir une boule rouge » sans qu'il y ait besoin de préciser à quel tirage la boule a été obtenue. De plus, quitte à agrandir la taille de l'arbre en conséquence, nous aurions pu considérer un plus grand nombre de tirage.



Exercices à traiter : 29, 30, 35 page 186

1.4 Partition de l'univers et formules des probabilités totales

Il est souvent utile de décomposer l'univers d'une expérience aléatoire en ensembles disjoints.

Exemple 1.4.1. 1. Lors d'un lancer de dé $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, il est possible de découper Ω en considérant les évènements suivants $A_1 = \{1, 3, 5\}$ (les faces impaires) et $A_2 = \{2, 4, 6\}$ (les faces paires). Peu importe le résultat du dé, nous obtiendrons un résultat qui se trouvera, exclusivement dans l'un de ses ensembles.

2. Pour diverses raisons, nous aurions pu procéder un autre découpage de l'univers. Par exemple $A_1 = \{1, 5\}$, $A_2 = \{4, 6\}$ et $A_3 = \{2, 3\}$. A nouveau, le résultat obtenu n'appartient qu'à un seul de ces ensembles.

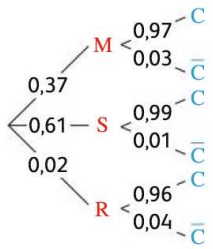
La notion que nous venons d'introduire consiste à former une partition de l'univers. D'une certaine manière, utiliser une partition de l'univers revient à énumérer (en fonction du contexte) de manière exhaustive les cas de figures envisageables lors d'une expérience aléatoire. Une définition plus précise de cette notion est donnée dans votre livre (cf. page 178).

Les partitions sont notamment utiles pour démontrer certain résultats car elles permettent de déterminer la probabilité d'un évènement en le décomposant en évènements plus simples. Ce genre de calcul apparait naturellement en utilisant des arbres pondérés.

Exemple 1.4.2. Il existe trois types d'eau qui peuvent être conditionnés : les eaux minérales M, les eaux de source S et les eaux rendues potables par traitements R. Des contrôles sanitaires révèlent que :

- 37% des prélèvements ont été effectués sur des eaux minérales. Parmi eux, 97% étaient conformes.
- 61% des prélèvements ont été effectués sur des eaux de sources. Par eux, 98% étaient conformes.
- parmi les prélèvements d'eaux rendues potables par traitement, 96% étaient conformes.

Nous notons C l'évènement « le prélèvement était conforme ». En utilisant les données de l'énoncé, nous pouvons établir l'arbre pondéré suivant



Nous avons implicitement fait une partition de l'univers en fonction de la provenance de l'eau (minérale, de source ou traitée). Grâce à cela et à la connaissance de probabilités conditionnelles, nous allons pouvoir déterminer la probabilité de C. Pour cela, il suffit d'observer (sur l'arbre) que seuls trois chemins mènent à l'évènement C. Ainsi,

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(M \cap C) + \mathbb{P}(S \cap C) + \mathbb{P}(R \cap C).$$

Il ne reste plus qu'à calculer la probabilité de chacun de ces chemins à l'aide de probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(C) + \mathbb{P}(S)\mathbb{P}_S(C) + \mathbb{P}(R)\mathbb{P}_R(C) = 0,37 \times 0,97 + 0,61 \times 0,99 + 0,02 \times 0,96 = 0,982.$$

De manière formelle, nous venons d'utiliser le résultat suivant.

Proposition 1 (Formules des probabilités totales)**.** *Soient $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ une partition de Ω telle que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et B un évènement. Nous avons alors la formule suivante :*

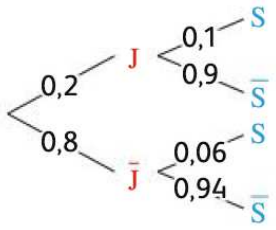
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \dots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$$

Exercices à traiter : 1 page 179 et Capacité 2 page 181.

1.5 Formule de Bayes

Pour mieux appréhender cette nouvelle formule, voyons ce qui se produit sur un exemple.

Exemple 1.5.1. 20% des assurés d'une compagnie d'assurances sont jeunes conducteurs (J), les autres étant des conducteurs expérimentés. Une étude statistique indique que la probabilité qu'un assuré jeune conducteur ait un sinistre responsable (S) au cours de l'année est de 10% contre 6% pour les assurés expérimentés. Avant toutes choses, il convient de dresser un arbre pondéré :



Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant eu un sinistre au cours de l'année soit jeune conducteur ? Autrement dit, nous souhaitons calculer $\mathbb{P}_S(J)$. Pour cela, il suffit d'appliquer la définition d'une probabilité conditionnelle ((a) ci-dessous) puis d'utiliser la formule des probabilités totales ((b) ci-dessous) pour déterminer la valeur du dénominateur.

$$\mathbb{P}_S(J) \overset{(a)}{=} \frac{\mathbb{P}(S\cap J)}{\mathbb{P}(S)} \overset{(b)}{=} \frac{\mathbb{P}(S\cap J)}{\mathbb{P}(S\cap J)+\mathbb{P}(S\cap \overline{J})} = \frac{\mathbb{P}(J)\mathbb{P}_J(S)}{\mathbb{P}(J)\mathbb{P}_J(S)+\mathbb{P}(\overline{J})\mathbb{P}_{\overline{J}}(S)} = \frac{0,2\times 0,1}{0,2\times 0,1+0,8\times 0,06} \approx 0,29.$$

De manière formelle.

Proposition 2 (Bayes)**.** *Soient $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ une partition de l'univers et B un évènement de probabilité non nulle alors, pour tout $i=1,\dots,n$,*

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B)+\ldots+\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)}.$$

Remarque. Dans l'exemple précédent, la partition était donnée par $A_1 = J$ et $A_2 = \overline{J}$; l'évènement d'intérêt était $B = S$.

Exercices à traiter : 41,42 page 188.