Chapitre 10

Probabilités conditionnelles

10.1 Introduction

10.2 Dépendance et indépendance

Parfois certain évènements ont un impact sur d'autres : par exemple, qu'elle est la probabilité que vous preniez un parapluie si la météo annonce de la pluie ? De manière intuitive, le fait de savoir qu'il risque d'y avoir de la pluie va influencer notre décision de prendre un parapluie. Voyons un autre exemple, plus terre à terre.

Exemple 10.2.1. Imaginons que nous lancions un dé équilibré à 6 faces. Sachant que nous avons obtenu un nombre impair, qu'elle est la probabilité d'avoir obtenu le nombre 3. A nouveau, de manière intuitive, il est tentant de répondre : si le résultat obtenu est impair, cela ne laisse que 3 possibilités. Parmi ces possibilités, une seule correspond à la face 3. Autrement dit, la probabilité recherchée vaut $\frac{1}{3}$.

Voyons de quelle manière cela peut se formaliser.

Définition 10.2.1. *Soit Ω un espace probabilisé et considérons deux évènements A et B tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. Nous appelons probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre, noté $\mathbb{P}_A(B)$, défini par*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Remarque. De manière intuitive, ce nombre correspond à la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A s'est déjà réalisé. Lorsque $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, il est parfois utile d'observer que les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$$

Maintenant que nous venons d'introduire la notion de dépendance entre deux évènements, il est naturel de s'interroger quant à la notion d'indépendance. C'est-à-dire, lorsque la réalisation de l'évènement A n'influe pas sur la réalisation de l'évènement B.

Définition 10.2.2. *Deux évènements A et B d'un espace probabilisé Ω sont dit indépendants lorsque*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Remarque. D'après la remarque suivant la notion de probabilité conditionnelle, cela signifie que $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$: ce qui correspond bien à notre intuition.

Exercices à traiter : $25, 26, 27$ page 331.

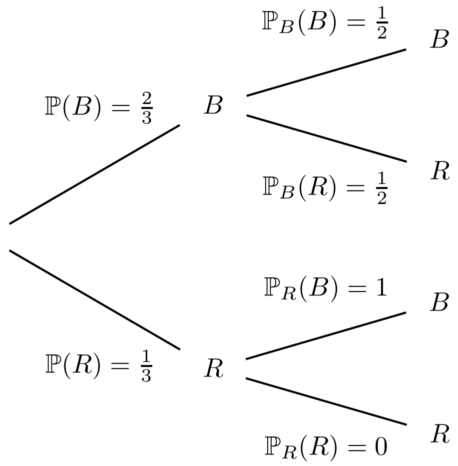
10.3 Représentation graphique

Il est plutôt pratique de représenter les probabilités conditionnelles à l'aide d'arbre pondéré. Voyons plutôt sur l'exemple suivant :

Exemple 10.3.1. Imaginons que nous ayons à disposition une urne contenant 3 boules, dont deux bleues et une rouge. Nous effectuons alors deux tirages successifs, sans remise, et considérons les deux évènements suivants :

$$B \text{ : obtenir une boule bleue} \quad \text{et} \quad R \text{ : obtenir une boule rouge.}$$

De manière graphique, cette expérience aléatoire (dans laquelle il est supposé que les boules sont indiscernables au touché) se représenterait de la façon suivante :



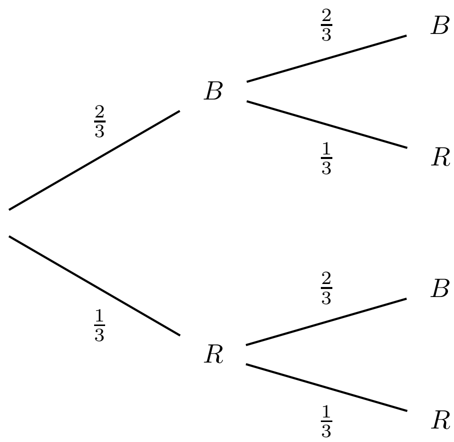
Au premier embranchement, les poids au dessus des branches correspondent à la probabilité des évènements B et B. Nous noterons au passage que la somme de ces poids vaut 1 (comme à chaque embranchement. A partir du deuxième embranchement, les probabilités sont des probabilités conditionnelles. En particulier, celles-ci indiquent le chemin suivi.

il est important de noter que la probabilité d'un chemin s'obtient en multipliant les poids des branches composant le chemin. Par exemple, la probabilité d'obtenir une boule blue, puis une une rouge vaut

$$\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$

Il est à noter que $\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(R) = \mathbb{P}(B \cap R)$. Autrement dit, le produit des poids d'un chemin correspond à la probabilité de l'intersection des évènements apparaissant sur le chemin.

Bien entendu, si l'expérience se faisait avec remise, nous aurions dresser l'arbre suivant pour lequel les mêmes règles de calculs s'appliquent. D'ailleurs, quitte à agrandir la taille de l'arbre en conséquence, nous aurions pu considérer un plus grand nombre de tirage.



Exercices à traiter : $31, 33$ page 332.

10.4 Partition de l'univers et formules des probabilités totales

Il est souvent utile de décomposer l'univers d'une expérience aléatoire en ensembles disjoints.

Exemple 10.4.1. 1. Lors d'un lancer de dé $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, il est possible de découper Ω en considérant les évènements suivants $A_1 = \{1, 3, 5\}$ (les faces impaires) et $A_2 = \{2, 4, 6\}$ (les faces paires). Peu importe le résultat du dé, nous obtiendrons un résultat qui se trouvera, exclusivement, dans l'un de ses ensembles.

2. Pour diverses raisons, nous aurions pu procéder un autre découpage de l'univers. Par exemple $A_1 = \{1, 5\}$, $A_2 = \{4, 6\}$ et $A_3 = \{2, 3\}$. A nouveau, le résultat obtenu n'appartient qu'à un seul de ces ensembles.

La notion que nous venons d'introduire consiste à former une partition de l'univers, voici la définition de ceci.

Définition 10.4.1. *Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $A_1, \ldots, A_n$ une famille de sous-ensemble de Ω (chacun de ses ensembles est composé de plusieurs évènements élémentaires de l'expérience). La famille $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ est une partition de Ω lorsque*

1. *les ensembles sont disjoints deux à deux : i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$.*
2. *La réunion de ces ensembles vaut Ω : i.e. $A_1 \cup \ldots, \cup A_n = \Omega$.*

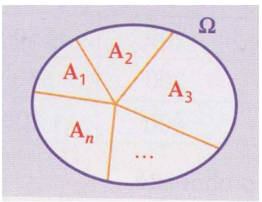


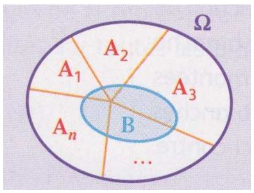
FIGURE 10.1 – Partition de l'univers

Les partitions sont notamment utiles pour démontrer certain résultats car elles permettent de décomposer un évènement.

Proposition 36. *Soit $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ une partition de Ω alors, pour tout évènement B, nous avons*

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \ldots + \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

Remarque. La partition $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ permet de décomposer l'évènement B. Cela est visible sur la figure ci-dessous.



Démonstration. La démonstration est évidente en utilisant la formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et la définition d'une partition. □

Exemple 10.4.2. Imaginons que nous disposions des informations suivantes concernant une épicerie 1 :

- 20% des produits qui ne sont pas d'origine française sont bios,
- 10% des produits d'origine française sont bios,
- 80% des produits de l'épicerie sont d'origine française.

B désigne l'évènement : « les produits sont bio » ; F désigne l'évènement : « les produits sont d'origines françaises ».

1. Quels sont les deux partitions de l'univers envisageables ? Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité qu'un produit soit bio et pas d'origine française.

Supposons à présent que nous ayons une deuxième épicerie 2 telle que :

- 15% des produits qui ne sont pas bios sont d'origine française,
- 10% des produits de l'épicerie sont bios dont 90% d'origine française.

1. Proposer un arbre pondéré permettant de décrire la situation.
2. Est-il plus probable que le produit choisi soit d'origine française et bio s'il provient de l'épicerie 1 ou s'il provient de l'épicerie 2 ?

L'utilisation d'une partition permet de relier certains calculs de probabilités avec des probabilités conditionnelles.

Proposition 37 (Formules des probabilités totales)**.** *Soient $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ une partition de Ω telle que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et B un évènement. Nous avons alors la formule suivante :*

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$$

Démonstration. La démonstration est évidente en observant que, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B).$$

□

Exercices à traiter : 44 page 333 et 55, 47 page 334.