Chapitre 10

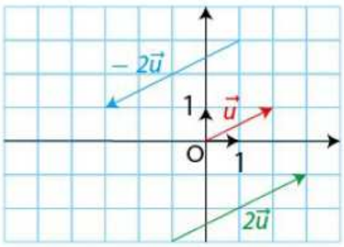
Vecteurs (2ème partie)

Dans ce chapitre nous allons poursuivre l'étude initiée dans le chapitre introduisant les vecteurs et leurs coordonnées. Nous allons voir de quelle manière il est possible de traduire les notions de géométrie rencontrées au collège à l'aide de vecteurs. Ici nous allons étudier la notion de **parallélisme**.

10.1 Colinéarité entre deux vecteurs

Rappelons qu'il est possible de **multiplier un vecteur** $\overrightarrow{u}$ par un **nombre réel** $k \in \mathbb{R}^*$. Graphiquement, cette opération **modifie la taille du vecteur** (et éventuellement son sens si $k < 0$) du vecteur proportionnellement au facteur k. Algébriquement, cela revient à **multiplier les coordonnées du vecteur** $\overrightarrow{u}$ par la constante k.

Exemple 10.1.1. Si $\overrightarrow{u} = (2; 1)$ et $k = 2$ alors $k \times \overrightarrow{u} = (2 \times 2; 2 \times 1) = (4; 2)$ et le nouveau vecteur est trois fois plus « grand »que le vecteur de départ.



Définition 10.1.1. *Deux vecteurs, non nuls,* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont* ***colinéaires*** *lorsqu'il existe un réel* $k \neq 0$ *tel que* $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$

Remarque. 1. Géométriquement, cela signifie que les **vecteurs** $\overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{v}$ **possèdent la même direction** (mais pas nécessairement le même sens).

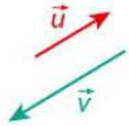


FIGURE 10.1: deux vecteurs colinéaires

2. La définition précédente est **symétrique** :

$$\overrightarrow{u} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{v} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{u}.$$

En effet, si $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$, il existe $k \in \mathbb{R}$ non nul tel que

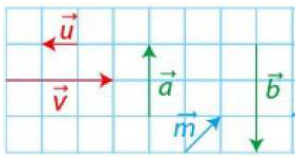
$$\overrightarrow{u} = k \times \overrightarrow{v}.$$

Puisque $k \neq 0$ ceci peut aussi s'écrire $\overrightarrow{v} = \frac{1}{k} \times \overrightarrow{u}$. Si nous posons $k' = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}^*$, nous avons donc $\overrightarrow{v} = k' \times \overrightarrow{u}$. Autrement dit, v est colinéaire à u.

Exemple 10.1.2. 1. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1; 2)$ et $\overrightarrow{v} = (-2; -4)$ sont colinéaires car $\overrightarrow{v} = -2 \times \overrightarrow{u}$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = (6; -3)$ et $\overrightarrow{v} = (4; -2)$ sont colinéaires car $\overrightarrow{v} = \frac{2}{3} \times \overrightarrow{u}$.

3. Dans l'exemple ci-dessous, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{m}$ est colinéaire avec aucun autre vecteur de la figure.



Exercices à traiter : 53,54 page 127 ; 55 page 127 à faire à la maison.

Lorsqu'un repère du plan $(O; I; J)$ est disponible, la notion de colinéarité entre deux vecteurs correspond à une relation de proportionnalité entre les coordonnées de ces vecteurs. Nous avons le critère suivant permettant d'établir la colinéarité entre deux vecteurs à partir de leurs coordonnées.

Proposition 32 (Critère de colinéarité)**.** *Soient* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *deux vecteurs. Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si*

$$xy' - x'y = 0.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}_*$ tel que $\overrightarrow{u} = k \times \overrightarrow{v}$, cela implique que $\overrightarrow{u} = (kx'; ky')$,

$$\text{i.e.} \quad x = kx' \quad \text{et} \quad y = ky'.$$

Par suite,

$$\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = kx'y' - ky'x' = 0.$$

Réciproquement, supposons que $\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0 \iff xy' - yx' = 0$. Si au moins l'un des vecteurs est nul, le résultat est évident et n'importe quelle valeur $k \neq 0$ convient. Supposons donc que $\overrightarrow{u}$ est non nul. Deux cas de figures s'offrent à nous

1. Soit $x \neq 0$, nous en déduisons que

$$xy' - yx' = 0 \iff xy' = yx' \iff y' = \frac{yx'}{x}.$$

   Ainsi, $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ avec $k = \frac{x'}{x}$.

2. Soit $y \neq 0$ et, en suivant le même raisonnement, nous obtenons

$$xy' - yx' = 0 \iff x' = \frac{xy'}{y}.$$

   Ainsi, $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ avec $k = \frac{y'}{y}$.

Dans chacun des cas nous avons trouvé $k \in \mathbb{R}_*$ tel que $\overrightarrow{v} = k \times \overrightarrow{u}$. Les vecteurs sont donc bien colinéaires. □

Remarque. La quantité précédente correspond au déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Elle est souvent notée de la manière suivante :

$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

Géométriquement, elle correspond à l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exemple 10.1.3.
1. Utilisons le critère précédent pour montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u} = (6;-3)$ et $\overrightarrow{v} = (4;-2)$ sont colinéaires. Ici, nous avons

$$\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 6 \times (-2) - (-3) \times 4 = 0.$$

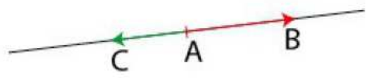
   Les vecteurs sont donc colinéaires.

2. Si maintenant, nous avons $\overrightarrow{u} = (-2;1)$ et $\overrightarrow{v} = (3;4)$ alors

$$\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = -2 \times 4 - 1 \times 3 = 5 \neq 0.$$

   Les vecteurs sont donc pas colinéaires.

Exercices à traiter : Reprendre l'exercice 54p127 en utilisant le déterminant, 58 page 127, 61 page 127 (algo) ; 56 page 127 (à faire à la maison).



10.2 Applications de la colinéarité en géométrie

La notion de colinéairité permet de savoir si des points sont alignés

Proposition 33. *Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*

Remarque. Bien entendu, il est possible remplacer, dans le théorème précédent, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$. L'important est que les vecteurs mis en jeu aient un point en commun.

Exemple 10.2.1. Soit $A(1;2)$ $B(-3;4)$ et $C(1;3)$. Montrons que ces points ne sont pas alignés. Pour cela, il faut et il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires. Ici,

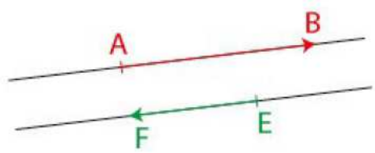
$$\overrightarrow{AB} = (-4;2) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (0;1)$$

Ainsi, $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -4 \times 1 - 2 \times 9 = -4 \neq 0$. Les vecteurs sont donc non colinéaires et, par conséquent, les points ne sont pas alignés.

Exercices à traiter : 59 page 127.

La colinéarité de vecteurs permet également de savoir si des droites sont parallèles.

Théorème 34. *Soient A, B, C et D quatre points du plan, deux à deux distincts. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.*



Exemple 10.2.2. Soient $A(-2;3)$, $B(4;2)$ et $D(3;-\frac{1}{2})$. Montrer que les droites (AB) et (OD) sont parallèles. Pour cela, il faut et il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires. Ici, nous avons

$$\overrightarrow{AB} = (6;-1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OD} = (3;-\frac{1}{2})$$

Par suite, $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OD}) = 6 \times (-\frac{1}{2}) - (-1) \times 3 = 0$. Les vecteurs sont donc bien colinéaires et, en conséquence, les droites sont parallèles.

Exercices à traiter : 10, 12 page 123; 60 page 127 à faire à la maison; 62,63 page 127 (facultatifs).

10.3 Bilan du chapitre

Voici les compétences à maitriser dans ce chapitre :

- Utilisation des vecteurs en géométrie.
- Etude de la colinéarité (avec le déterminant ou la définition).
- Calculer les coordonnées de $k\overrightarrow{u}$.