Chapitre 11

Monotonie d'une suite et limite

11.1 Sens de variation d'une suite

11.1.1 Définition

Comme nous l'avons signifié plus tôt, une suite est famille de nombres indexée par des entiers et correspond à un cas particulier de fonctions où n parcourt les entiers plutôt que les nombres réels. Tout comme lors de l'étude de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il est possible d'étudier la monotonie d'une suite. Nous allons voir que cette étude est plus simple à mettre en place que l'étude des variations d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que nous avons déjà aborder dans ce cours.

Voyons déjà ce que cela pourrait signifier sur des exemples.

Exemple 11.1.1. 1. La suite géométrique $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ de raison $q = \frac{1}{2}$ définie par $t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ avec $n \geq 0$ semble être décroissante (puisque $t_0 \geq t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \ldots$).

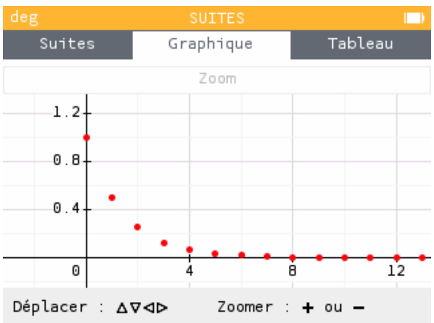

FIGURE 11.1 – Graphique associé à la suite $(t_n)_{n\geq 0}$

2. La suite arithmétique $v_n = -4 + 5n$ avec $n \geq 0$ semble être croissante (puisque $v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3 \leq \ldots$).

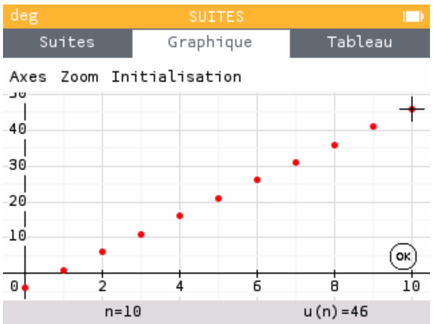

FIGURE 11.2 – Graphique associé à la suite $(v_n)_{n\geq 0}$

3. La suite $u_n = 2$ avec $n \geq 0$ semble être constante.

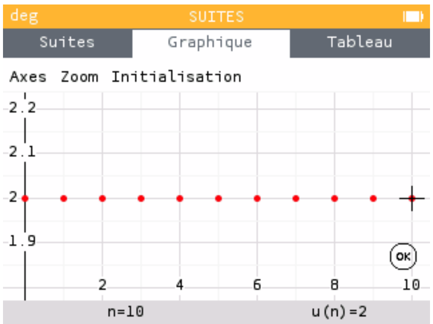

FIGURE 11.3 – Graphique associé à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

Il semblerait qu'une suite décroissante voit ses valeurs devenir de plus en plus petite, tandis qu'une suite croissante voit ses valeurs augmenter. Plus formellement, cela donne la définition suivante.

Définition 11.1.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique, une telle suite sera dite*

- *croissante si, pour tout entier $n \geq 0$*

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

- *décroissante si, pour tout entier $n \geq 0$,*

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

- *constante si, pour tout entier $n \geq 0$,*

$$u_{n+1} = u_n.$$

Remarque. 1. En remplaçant le symbole $\geq$ par $>$ (resp. $\leq$ par $<$) on peut égalemement définir la notion de suite strictement croissante (resp. strictement décroissante).

2. Vocabulaire : une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Traiter les exercices 55,59 **page** 67. *Indication : pour montrer qu'une suite est monotone, il faut comparer* u_n *avec* u_{n+1} *pour un entier* n *quelconque.*

11.1.2 Etude du sens de variation

En reformulant la définition 11.1.1, nous obtenons des critères pratiques pour étudier la monotonie d'une suite. En effet, l'étude de la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ consiste à **déterminer le signe** de

$$u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

Remarque. Ce taux d'accroissement entre deux termes consécutifs s'apparente à une dérivée discrète.

En effet, observons les faits suivants :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0 \iff u_{n+1} \geq u_n$. Autrement dit u_n est une suite croissante.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0 \iff u_{n+1} \leq u_n$. Autrement dit u_n est une suite décroissante.

De manière alternative, sous certaines conditions, il est possible d'étudier des quotients. Lorsque $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il convient d'étudier si **le rapport**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

est supérieur ou inférieur à 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela provient de l'observation suivante :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \iff u_{n+1} \geq u_n$. Autrement dit u_n est une suite croissante.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \iff u_{n+1} \leq u_n$. Autrement dit u_n est une suite décroissante.

Remarque. Notons au passage que ces calculs sont visiblement moins complexe que ceux permettant de calculer la dérivée f' d'une fonction dérivable f.

Voyons plutôt au travers de deux exemples.

Exemple 11.1.2. 1. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{3}{n+2}$ avec $n \geq 0$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+2} \\ &= \frac{3n+6-3n-9}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{-3}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$

De plus, puisque $n \in \mathbb{N}$ nous avons immédiatement que $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$. Autrement dit, le dénominateur est strictement positif. Par suite, puisque $-3 < 0$, nous en déduisons que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \geq 0$. Ceci signifiant que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est (strictement) décroissante.

2. Si $v_n = \frac{3^{2n+1}}{5^n}$ pour $n \geq 0$ alors, puisque $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit d'étudier le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$. Ici, nous avons

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{2n+3}}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{3^{2n+1}} = \frac{3^2}{5} > 1$$

donc la suite est croissante.

Traiter les exercices 47**,** 48 **page** 62.

Bien entendu lorsque la suite étudiée vérifie des propriétés supplémentaires, la situation est plus simple.

Proposition 38 (Monotonie d'une suite arithmétique)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite arithmétique de raison* $r \in \mathbb{R}$*, alors*

- *si* $r > 0$ *la suite est strictement croissante ;*
- *si* $r < 0$ *la suite est strictement décroissante ;*
- *si* $r = 0$ *la suite est constante.*

Exemple 11.1.3.

1. La suite arithmétique définie par $u_n = -4 + 5n$ pour $n \geq 0$ est croissante puisque $r = 5 > 0$.
2. La suite arithmétique définie par $u_n = 2 - 3n$ pour $n \geq 0$ est décroissante puisque $r = -3 < 0$.

Nous avons le même type de résultat pour les suites géométrique.

Proposition 39 (Monotonie d'une suite géométrique)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite géométrique de raison* $q \in \mathbb{R}$ *avec* $\mathbf{u_0 > 0}$*, alors*

- *si* $0 < q < 1$ *la suite est strictement décroissante ;*
- *si* $q > 1$ *la suite est strictement croissante ;*
- *si* $q = 1$ *la suite est constante.*

Remarque. Si $q < 0$ il n'est pas possible de conclure. Si jamais $\mathbf{u_0 < 0}$, les conclusions des deux premières assertions sont inversées. C'est-à dire :

- si $0 < q < 1$ la suite est strictement croissante ;
- si $q > 1$ la suite est strictement décroissante ;

Exemple 11.1.4.

1. La suite géométrique définie par $u_n = 10 \times 5^n$ pour $n \geq 0$ est croissante puisque $q = 5 > 1$ et $u_0 = 10 > 0$.
2. La suite arithmétique définie par $u_n = 2 \times \frac{1}{2^n}$ pour $n \geq 0$ est décroissante puisque $q = \frac{1}{2} < 1$ et $u_0 = 2 > 0$.

Traiter les exercices 48, 49 **page** 66 **et l'exercice** 69 **page** 68

Il est possible de mener notre étude plus loin encore. En effet, lorsqu'un suite est définie de manière explicite par une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, la monotonie de f détermine celle de la suite. Plus précisément

Théorème 40. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie à l'aide d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par*

$$u_n = f(n) \quad n \geq 0.$$

alors
- *si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante ;*
- *si f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.*

Remarque. Il est possible de remplacer les mots strictement croissante (resp. strictement croissante) par croissante (resp. décroissante) dans ce qui précède.

Exemple 11.1.5. 1. La fonction affine $f(x) = \frac{x}{2} + 3$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; en conséquence la suite
$$u_n = \frac{n}{2} + 3 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$
l'est également.

2. Si $f(n) = \frac{1}{3}n^3 - 6n^2 + 27n$ pour tout $n \geq 0$. Il suffit d'étudier les variations de
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 27x \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_+.$$
Ici, $f'(x) = x^2 - 12x + 27$ et $\Delta > 0$: il y a donc deux racines $x_1 = 3$ et $x_2 = 9$. De plus $a = 1 > 0$, donc $f'(x) \geq 0$ si $x \geq 9$: autrement dit, f est croissante sur l'intervalle $[9; +\infty[$ (*elle l'est aussi sur l'intervalle* $]-\infty; 3]$ *mais cette partie ne nous intéresse pas*). En conséquence, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante lorsque $n \geq 9$.

Il est important de ne pas chercher à généraliser le théorème précédent aux suites définies par récurrence. L'étude de celles-ci est un peu plus complexes et n'est pas du programme. L'exemple suivant peut-être omis en première lecture.

Exemple 11.1.6. Considérons les suites
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3 & n \geq 0, \\ u_0 = 8. \end{cases}$$
et
$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + 3 & n \geq 0, \\ v_0 = 1. \end{cases}$$
sont bien de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{x}{2} + 3$ une croissante. Cependant, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante tandis que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.

Traiter l'exercice résolu n°5 page 63 **et l'exercice** 77 **page** 70

11.2 Notion de limite

Dans cette section nous nous interrogeons quant au comportement de u_n lorsque n devient de plus en plus grand. Autrement dit, nous nous demandons ce qui se produit lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = ?$$

Un moment de réflexion suggère que plusieurs cas de figures sont envisageables.

Exemple 11.2.1.

1. Les termes de la suite semblent s'accumuler près d'une valeur : $u_n = \frac{1}{n}+1$ pour $n \geq 1$.

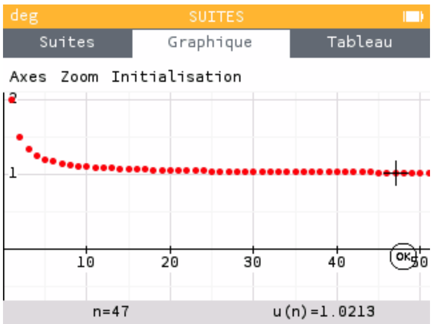

FIGURE 11.4 – Graphique associé à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

Il semblerait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. Les valeurs semblent devenir de plus en plus grande vers $+\infty$: $v_n = e^{0,2n}$ pour $n \geq 1$ ou $v_n = -n^2$ pour $n \geq 0$.

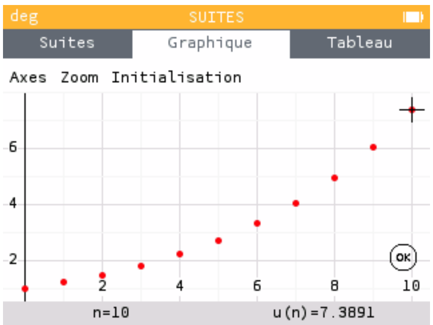

FIGURE 11.5 – Graphique associé à la suite $v_n = e^{0,2n}$

Il semblerait que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3. Les valeurs semblent devenir de plus en plus grande vers $-\infty$: $w_n = -n^2$ pour $n \geq 0$.

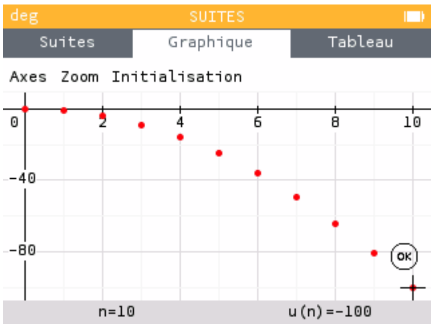

FIGURE 11.6 – Graphique associé à la suite $w_n = -n^2$

Il semblerait que $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

4. Les points semblent se disperser dans chaque direction : $t_n = (-2)^n$ pour $n \geq 0$.

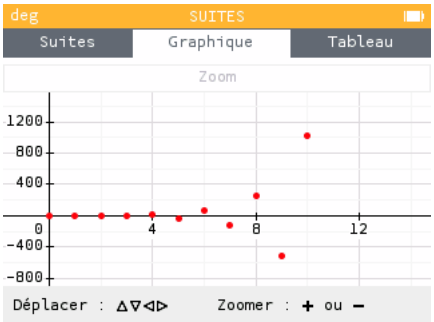

FIGURE 11.7 – Graphique associé à la suite $(t_n)_{n\geq 0}$

Il semblerait que la limite $\lim_{n+\infty} t_n$ n'existe pas.

Vocabulaire :

- Lorsque u_n se rapproche d'une valeur $l \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$, nous dirons que u_n converge vers l.
- Lorsque u_n se rapproche de $\pm\infty$ lorsque $n \to +\infty$, nous dirons que u_n diverge.

Voici un résultat concernant la limite d'une suite.

Proposition 41 (Unicité de la limite)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$$

La limite l *est alors unique*

Démonstration. Admise. □

En exercice, il sera important (à l'aide la calculatrice) **de conjecturer la valeur de la limite (lorsqu'elle existe) d'une suite**.

Etudions plusieurs situations ; nous écrivons en *italique* les justifications rigoureuses de ces conjectures, ces parties peuvent être omises en première lecture. Voici tout de même des explications heuristiques les concernant :

1. Dire qu'une suite converge vers une valeur finie l signifie que, pour **n'importe quelle taille de boite** centrée autour de ce point l, il **existe un rang** N à partir duquel **tous les termes de la suite sont coincés dans cette boite**.
2. Dire qu'une suite diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), signifie que pour n'importe quelle valeur $A > 0$ (resp. $A < 0$), il est **possible de trouver un rang** N à partir duquel **tous les termes de la suite dépasse la valeur** A (resp. sont inférieurs à la valeur A).

Exemple 11.2.2 (Convergence vers une limite finie)**.** Soit $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. L'intuition suggère que u_n se rapproche de plus en plus de zéro lorsque $n \to +\infty$.

Pour le démontrer il faut montrer que pour tout intervalle (ouvert) I contenant 0, *il est possible de trouver un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont contenu dans I.*

Si $I =]0; 10^{-3}[$ alors il suffit de choisir $N = 10^3 + 1$. En effet, si $n \geq 10^3 + 1$ alors

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10^3 + 1} \leq \frac{1}{10^3}.$$

Autrement dit, si $n \geq N$ alors $u_n \in I$. Nous venons de montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Observons que la taille de l'intervalle I modifie le choix du rang N : si I était plus grand, nous aurions pu choisir N plus petit ; si I était plus petit, nous aurions choisi N plus grand.

Exemple 11.2.3 (Divergence vers $+\infty$)**.** Soit $u_n = 3n^2 + 1$ pour $n \geq 1$. L'intuition suggère que u_n se rapproche de $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Nous devons donc montrer que le nombre A choisi (supposé grand), il est possible de trouver un rang N tel que $u_n > A$ à partir de ce rang.

Supposons que $A = 10^6$, alors $u_n > A \iff 3n^2 + 1 > 10^6 \iff n > \sqrt{\frac{10^6-1}{3}}$. Or $\sqrt{\frac{10^6-1}{3}} \approx 577,35$, il suffit donc de choisir $N = \lfloor\sqrt{\frac{10^6-1}{3}}\rfloor + 1 = 578$ ($\lfloor\cdot\rfloor$ est l'application partie entière d'un nombre) pour que $u_n > A$ lorsque $n \geq N$. Autrement dit,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

A nouveau, N dépend de la valeur de A.

Exemple 11.2.4 (Suite n'admettant pas de limite)**.** Soit $u_n = (-1)^n n^2$ pour $n \geq 0$. Le calculs de quelques termes de la suite suggère qu'elle se disperse vers $+\infty$ et vers $-\infty$. Il est donc naturel de penser que la limite n'existe pas.

Pour cela, nous allons étudier des sous-suites de $(u_n)_{n\geq 0}$. Ici, nous allons étudier séparément la suite des termes paires $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et la suite des termes impaires $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ pour montrer que celles-ci ont des limites différentes. Par unicité de la limite, cela impliquera que la suite initiale $(u_n)_{n\geq 0}$ ne peut converger.

Observons que $u_{2n} = 4n^2$ et qu'il est possible de montrer que $4n^2 \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. De plus $u_{2n+1} = -(2n+1)^2 = -(4n^2+n+1)$ et cette suite diverge vers $-\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$$

donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite.

Remarque. Lorsque la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, il n'est pas possible de trouver des sous-suites (comme les termes paires ou impaires étudiés ci-dessus) qui converge vers une autre limite $l' \in \mathbb{R}$. En fait, dans ce cas précis, toutes les sous-suites convergent vers la même limite l.

Exercices à traiter : $43, 44, 45, 46$ **page** 66 **et** $72, 74$ **page** 69.