Chapitre 11

Variables aléatoires discrètes et loi de Bernoulli

11.1 Loi d'une variable aléatoire

11.1.1 Variable aléatoire

Définition 11.1.1. *Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Définir une variable aléatoire X sur Ω revient à associer à chaque issue de Ω un nombre $p \in [0; 1]$.*

Remarque. Une variable aléatoire est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dont l'issue est aléatoire.

Voici un exemple permettant de mieux appréhender ceci.

Exemple 11.1.1. Considérons l'expérience aléatoire suivante.

Un joueur mise 2 euros puis lance deux dés trétraédiques parfaits. Il lit le résultat obtenu sur chacun des dés (un entier compris entre 1 et 4). S'il obtient un « double », le joueur récupère sa mise et reçoit une somme, en euros, égale au total des points marqués ; sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.

Nous nous intéressons au gain (algébrique) du joueur que nous noterons X (les valeurs prises par la fonction X sont aléatoires, il s'agit bien d'une variable aléatoire).

Décrivons plus en détails, l'expérience aléatoire mise en jeu :

- l'univers de cet expérience est un couple d'entier $(x; y)$ avec $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y \leq 4$ (x correspondant au résultat du 1er dé, y à celui du deuxième). Les dés étant parfaits, les issues obtenues sont équiprobables et se réalisent avec une probabilité de $\frac{1}{16}$.

- Pour définir la variable X il est important de décrire les valeurs qu'elle va prendre à partir des différentes issues de l'expérience aléatoire. Ceci peut s'effectuer à l'aide d'un tableau à double entrée : la première ligne désigne le résultat du premier dé, tandis que la première colonne correspond à la valeur affichée par le deuxième dé. C'est-à-dire, a chaque issue nous associons un gain : $(1,1) \mapsto 2$, $(1,2) \mapsto -2$,... afin de définir la variable aléatoire X.

	1	2	3	4
1	2	-2	-2	-2
2	-2	4	-2	-2
3	-2	-2	6	-2
4	-2	-2	-2	8

En résumé, $X \in \{-2; 2; 4; 6; 8\}$. Pourtant cette description de X n'est pas encore satisfaisante, c'est l'intérêt de la section suivante.

11.1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Une fois qu'une variable aléatoire est définie, il est intéressant de déterminer avec quelle probabilité les différentes valeurs sont prises. Par exemple, quelle est la probabilité de l'évènement « gagner 2 euros » ? Autrement dit, quelle est la probabilité de l'évènement $X = 2$?

En utilisant le tableau de la section précédente, nous observons que cet évènement est uniquement réalisé pour l'issue $(1; 1)$. Donc, puisqu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité,

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{16}.$$

De manière similaire, l'évènement $X = -2$ est composé de 12 issues (tous les couples $(x; y)$ avec $x \neq y$), cela assure donc que

$$\mathbb{P}(X = -2) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Il est alors utile de résumé ceci dans un tableau.

Gain x_i	-2	2	4	6	8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Ce tableau représente la loi de probabilité de X et c'est le genre de chose qu'il faudra établir en exercice.

Remarque. Observons que $\mathbb{P}(X_= - 2) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 8) = 1$, cela sera toujours le cas : lorsqu'on additionne toutes les valeurs $\mathbb{P}(X = x_i)$ le résultat doit être égale à 1.

11.1.3 Espérance

Dans ce qui suit nous considérons une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

Valeur x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

Remarque. Cela signifie que la variable X prend k valeurs distinctes $x_1, \ldots, x_k$ et la deuxième ligne explique avec quelle probabilité ces valeurs sont prises. Cela est à comparer avec l'exemple précédent (avec les deux dés à quatre faces).

Définition 11.1.2. *L'espérance de X, notée $\mathbb{E}[X]$ définie par*

$$\mathbb{E}[X] = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k$$

Remarque. L'espérance est, en probabilité, l'analogue de la moyenne en statistiques. Lorsque X modélise un jeu de hasard, $\mathbb{E}[X]$ peut s'interpréter comme le gain moyen pouvant être espéré par le joueur.

Exemple 11.1.2. Reprenons l'exemple du jeu de dé pour calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Ici,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{3}{4} \times (-2) + \frac{1}{16} \times 2 + \frac{1}{16} \times 4 + \frac{1}{16} \times 6 + \frac{1}{16} \times 8 = -0,25.$$

S'il le joueur joue un très grand nombre de parties (plus de 30) dans les mêmes conditions, le gain moyen qu'il peut espérer est de $-0,25$. Il s'agit d'une application de la loi forte des grands nombres de Kolmogorov.

Traiter les exercices : 1 à 6

11.2 Loi de Bernoulli

Il est possible d'associer une variable aléatoire à une épreuve de Bernoulli (expérience aléatoire ne présentant que deux issues : succès et échec).

Définition 11.2.1. *Considérons une épreuve de Bernoulli de paramètre p (la probabilité du succès), la variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec est appelée* ***variable aléatoire de Bernoulli****. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :*

Valeur x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$1 - p$	p

Exemple 11.2.1. Soit l'épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer un dé tétraédique et dont le succès est S : « obtenir la face 3 ». Puisqu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité

$$p = \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(\text{obtenir la face 3}) = \frac{1}{4}.$$

Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès, 0 sinon. Nous avons donc

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\text{obtenir la face 3}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\overline{S}) = \frac{3}{4}.$$

X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4}$.

Proposition 22. *Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$ alors $\mathbb{E}[X] = p$.*

Traiter les exercices : 7 à 14