Chapitre 14

Calcul littéral (3ième partie)

Dans ce chapitre nous allons poursuivre notre étude du calcul littéral. Depuis le début de l'année, nous avons vu comment développer des expressions algébriques (parfois en utilisant des identités remarquables), nous avons aussi vu des méthodes de factorisation (facteur commun ou identité remarquable) et nous avons vu comment étudier le signe d'un produit de facteurs.

A présent, nous allons voir comment traiter le cas des quotients.

14.1 Expressions fractionnaires

Rappelons que pour additionner des fractions, il est nécessaire de trouver un dénominateur commun. Voyons sur des exemples.

Exemple 14.1.1. 1. Débutons simplement

$$\frac{2}{5}+\frac{7}{3}=\frac{2\times 3}{5\times 3}+\frac{7\times 5}{3\times 5}=\frac{6}{15}+\frac{35}{15}=\frac{6+35}{15}=\frac{41}{15}.$$

Ici, le dénominateur commun était $3\times 5=15$.

2. Bien entendu, lorsque l'expression algébrique dépend de x les calculs s'effectuent de la même manière.

$$\frac{5x}{2}+\frac{2x-1}{3}=\frac{5x\times 3}{2\times 3}+\frac{(2x-1)\times 2}{3\times 2}=\frac{15x+4x-2}{6}=\frac{19x-2}{6}.$$

3. Les arguments permettent également de traiter la somme de fraction impliquant x au dénominateur. En effet, si $x\neq 0$, nous avons

$$\frac{10}{x}-\frac{3x}{5}=\frac{10\times 5}{x\times 5}-\frac{3x\times x}{5\times x}=\frac{50-3x^2}{5x}.$$

4. Traitons un dernier exemple pour lequel x est présent au deux dénominateurs.

$$\frac{2}{x}+\frac{5}{x-4}=\frac{2(x-4)}{x(x-4)}+\frac{5x}{x(x-4)}=\frac{2(x-4)+5x}{x(x-4)}=\frac{7x-8}{x(x-4)}.$$

Exercices à traiter : exercices 11 (question 1 uniquement) et 13 (question a uniquement) page 49 et exercices $75, 76, 72$ page 53.

14.2 Equations quotient

Plus tôt dans l'année, nous avions vu comment résoudre des équations de la forme : $(2x - 7)(-x-3) = 0$. Pour cela, nous utilisions la règle dite « du produit nul ». Celle-ci nous assure que

$$(2x-7)(-x-3)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x-7=0 \quad \text{ou} \quad -x-3=0.$$

Voyons ce qui se produit lorsqu'il s'agit d'un quotient.

Exemple 14.2.1. Résolvons

$$\frac{2x+1}{x-5}=0. \tag{14.2.1}$$

1. Tout d'abord, il convient de déterminer les valeurs annulant le dénominateur. Puisqu'il est interdit de diviser par 0, ces valeurs doivent être exclues : elles sont alors désignées sous l'appellation de ***valeurs interdites***. Ici, la valeur interdite est obtenue en résolvant

   $$x-5=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=5.$$

   La valeur 5 annule le dénominateur, il s'agit d'une valeur interdite.
2. La valeur interdite étant exclue, nous pouvons résoudre l'équation (14.2.1). Pour cela nous allons employer la règle du « quotient nul ». Celle-ci affirme qu'un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur est non nul. Autrement dit,

   $$\frac{2x+1}{x-5}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x+1=0 \quad \textbf{et} \quad x-5\neq 0 \quad\Longleftrightarrow x=-\frac{1}{2} \quad \textbf{et} \quad x\neq 5$$

   L'ensemble des solutions de (14.2.1) est donc $S=\{-\frac{1}{2}\}$.

Proposition 43 (Règle du quotient nul)**.** *Pour tout $A, B \in \mathbb{R}$, nous avons la règle*

$$\frac{A}{B}=0 \quad\Longleftrightarrow A=0 \quad \textbf{\textit{et}} \quad B\neq 0.$$

Parfois, cette règle n'est pas directement utilisable et il est nécessaire de manipuler un l'expression algébrique avant d'employer la règle de produit nul.

Exemple 14.2.2. Résolvons $\frac{4x-1}{2x+1}=3$. Tout d'abord, il convient de transformer cette expression algébrique sous la forme d'un quotient nul.

$$\frac{4x-1}{2x+1}=3 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{4x-1}{2x+1}-3=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{4x-1}{2x+1}-\frac{3}{1}=0.$$

Il s'agit ensuite de mettre ces deux fractions au même dénominateur pour ensuite utiliser la règle du produit nul.

$$\frac{4x-1}{2x+1}-\frac{3}{1}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{4x-1}{2x+1}-\frac{3\times(2x+1)}{1\times(2x+1)}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{4x-1}{2x+1}-\frac{6x+3}{2x+1}=0$$

Ce qui mène à

$$\frac{4x-1-6x-3}{2x+1}=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-2x-4}{2x+1}=0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x-4=0 \quad \text{et} \quad 2x+1\neq 0.$$

En résumé, l'ensemble des solutions est $S=\{2\}$ et $-\frac{1}{2}$ est une valeur interdite.

Remarque. Pour résoudre $\frac{4x-1}{2x+1}=3$, nous pourrions être tenter de faire un « produit en croix »(ce qui revient à multiplier chaque membre par le dénominateur du membre opposé) :

$$\frac{4x-1}{2x+1}=\frac{3}{1} \quad \Longleftrightarrow \quad (4x-1)\times 1 = 3\times(2x+1).$$

Nous pourrions ensuite procéder à une résolution classique. L'inconvénient de ceci est qu'il faut **absolument spécifier** que $2x+1\neq 0$, sans quoi nos calculs n'auraient aucun sens. Il est plus prudent de proscrire cette méthode et de travailler avec les quotients.

Exercices à traiter : exercices$6, 7$ page 93, $18, 28, 25, 33$ page 96.

14.3 Signe d'un quotient

Voyons à présent comment traiter le cas des inéquations faisant intervenir un quotient.

Exemple 14.3.1. Pour résoudre,

$$\frac{x+4}{x-2} \geq 0$$

nous devons dresser un tableau de signe. Dans celui-ci nous devrons indiquer la présence d'une valeur interdite (annulant le dénominateur $x-2$) ; ceci s'effectue à l'aide d'une double barre. Les règles de signes que nous avons pu observer dans un chapitre précédent sont toujours vérifiées. Voyons plutôt,

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+4}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

A nouveau, commentons le tableau précédent. La proposition 17 permet d'obtenir le signe de la deuxième et troisième ligne. La dernière ligne est obtenue en utilisant les règles suivantes :

$$\frac{+}{+} = +, \quad \frac{+}{-} = - \quad \text{et} \quad \frac{-}{-} = +.$$

Cette dernière ligne fournit donc le signe du quotient $\frac{x+4}{x-2}$. La présence de la double barre dans la dernière ligne est là pour indiquer que 2 est une valeur interdite. Finalement, la solution de notre inégalité est l'intervalle $]-\infty;-4]\cup]2;+\infty[$. Autrement dit,

$$\frac{x+4}{x-2} \iff x \in]-\infty;-4]\cup]2;+\infty[$$

Bien entendu, un certain travail peut parfois être nécessaire pour se ramener à l'étude du signe d'un quotient.

Exemple 14.3.2. Résolvons $x \geq \frac{1}{x}$. Pour cela, ramenons nous à l'étude du signe d'un quotient :

$$x \geq \frac{1}{x} \iff x - \frac{1}{x} \geq 0 \iff \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} \geq 0.$$

Nous devons donc dresser le tableau de signe de

$$\frac{x^2-1}{x} \geq 0 \iff \frac{(x+1)(x-1)}{x} \geq 0.$$

Il est évident que 0 est une valeur interdite (puisqu'elle annule le dénominateur).

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x+1)(x-1)}{x}$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

En conclusion,

$$x \geq \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x-1)}{x} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[.$$

Remarque. Il n'aurait pas été correct de transformer l'équation de départ à l'aide d'un produit en croix :

$$x \geq \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \geq 1$$

car cela présuppose des distinctions de cas assez pénibles (si $x \geq 0$ l'inéquation ne change pas de sens, tandis que si $x \leq 0$, le sens change). Cette méthode est également à proscrire.

Exercices à traiter : 15, 16 page 95, 57, 59, 60, 61 page 98, 64 page 99.