Chapitre 14

Probabilités sur un ensemble fini

14.1 Introduction

Contrairement à d'autres branches des mathématiques, la géométrie euclidienne ou l'algèbre par exemple, les probabilités sont nées beaucoup plus tardivement. Quelques considérations élémentaires furent abordées par Jérôme Cardan au début du 16ième siècle et par Galilée au début du 17ième siècle mais le véritable début de cette théorie date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal, en 1654.

Il fallut attendre la deuxième moitié du 17ième siècle, à la suite des travaux de Blaise Pascal et Pierre de Fermat, pour que le terme « probabilité » prenne peu à peu son sens actuel, grâce aux études menées par Jakob Bernoulli.

A la fin du 18ième siècle, cette nouvelle théorie fera son apparition dans l'encyclopédie de Diderot. Cependant, il fallut patienter jusqu'au début du 20ième siècle pour que la théorie des probabilités un nouvel essor. Celui-ci est du à la mise en place, en 1933, par le mathématicien russe Kolmogorov, d'une axiomatisation mathématique (que nous utilisons toujours actuellement) permettant de traiter la théorie des probabilités avec une véritable rigueur. Il fut d'ailleurs à l'origine de travaux révolutionnaires dans cette branche et résolu un grand nombre de problèmes qui avait dérouté de nombreux mathématiciens de l'époque.

14.2 Evènements et notation ensembliste

Avant d'aborder des calculs de probabilités, il est nécessaire de définir ce que nous entendons par « expérience aléatoire », par « évènement », puis de rappeler quelque propriétés de la théorie des ensembles.

14.2.1 Vocabulaire

Définition 14.2.1. • *Une expérience aléatoire est une expérience dont les résultats possibles sont connus sans pour autant que nous puissions prédire lequel d'entre eux va se réaliser.*

- *Les éventuels résultats d'une expérience aléatoire sont appelés* **issues**.
- *L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire s'appelle* **l'univers** *et sera désigné par* Ω.

Il est possible de proposer de nombreuses expérience aléatoire apparaissant dans la vie commune, voici quelques exemples.

Exemple 14.2.1.
1. Lancer un dé (à six faces) et observer son résultat est une expérience aléatoire. « six » est une issue de cette expérience et $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'univers associé.
2. Tirer une carte (dans un paquet de 32 cartes). « As de pique » est une issue possible et $\Omega = \{$as de pique, roi de pique, dame de pique,...$\}$ l'univers associé.

Remarque. Bien entendu, il existe de nombreuses expériences aléatoires beaucoup plus complexes dont la description dépasse largement le cadre de ce cours. A titre d'exemple, voici un phénomène qu'il est possible de visualiser chez soi : imaginons que nous observions un grain de poivre dans une casserole d'eau bouillante. Les molécules d'eau, agitées, vont venir frapper et déplacer le grain de poivre. La trajectoire du grain de poivre devient alors erratique, imprévisible et correspond à un objet probabiliste très célèbre : le mouvement Brownien. Celui-ci a été découvert par le botaniste Brown (en 1827) et fut étudié par Einstein (en 1905), cet objet est notamment utilisé, entre autre, en finance pour décrire l'évolution de la bourse. Il est également possible de visualiser ceci en ligne, sur le site

$$http://labs.minutelabs.io/Brownian-Motion/.$$

La plupart du temps nous allons étudier des sous-ensembles de l'univers, il s'agit de la notion ***d'évènement***.

Définition 14.2.2. *Un évènement A est un sous-ensemble de l'univers Ω.*

Remarque.
- Souvent, un évènement quelconque A peut s'exprimer à l'aide d'évènements plus élémentaires (la plupart correspondant aux différentes issues composant l'univers d'une expérience aléatoire).
- Certains évènements portent un nom particuliers. L'ensemble vide, noté $\emptyset$, correspond à un ***évènement impossible*** (ne pouvant se réaliser). Au contraire, l'évènement Ω, est ***évènement certain*** et se réalise tout le temps.

Exemple 14.2.2. Lors de l'étude du lancer de dés (à six faces), il est possible de considérer l'évènement : $A = \{$obtenir un nombre pair$\}$. Il est évident que l'ensemble A se décrit de manière équivalente comme $A = \{2; 4; 6\}$.

Quelques mots sur la terminologie : si jamais nous avions obtenu le nombre 4 après avoir lancer le dé, nous dirions que « ***l'issue 4 réalise l'évènement A*** » ; au contraire, l'issue 1 (par exemple) ne réalise pas l'évènement A.

Exercice à traiter : 13 page 310.

14.2.2 Union, intersection et complémentaire

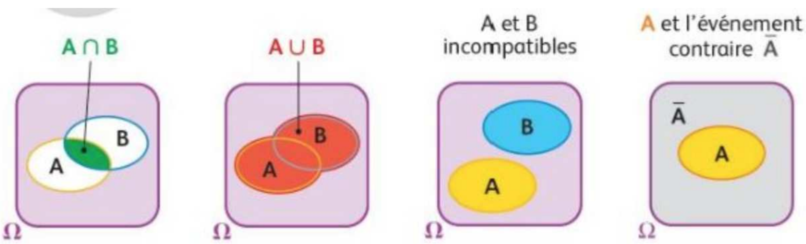
Comme nous allons le voir, à partir d'évènements il est possible d'en construire de nouveau à l'aide d'opérations ensemblistes. Dans ce qui suit A et B désignerons deux évènements d'un univers Ω.

Définition 14.2.3. *1.* **L'intersection** *de A et B, notée $A \cap B$ correspond à l'ensembles des issues appartenant à A* **et** *à B. Si jamais cet ensemble est vide, $A \cap B = \emptyset$, nous dirons que les évènements A et B sont* **incompatibles** *(les deux évènements ne peuvent se réaliser en même temps) ou* **disjoints***.*

2. **L'union** *de A et de B, noté $A \cup B$, correspond à l'ensemble des issues appartenant à* **au moins l'un** *des deux évènements A ou B. Autrement dit, une issue appartient à $A \cup B$ si elle appartient à l'évènement A ou à l'évènement B ou les deux.*

3. **L'évènement complémentaire** *(aussi appelé évènement contraire) d'un évènement A correspond à l'ensemble des issues n'appartenant à pas à A. Nous désignerons cet évènement par A^c ou $\bar{A}$.*

Voici des diagrammes, inventés par le mathématicien Venn $(1834-1923)$, permettant d'illustrer graphiquement les définitions ci dessus.



Exemple 14.2.3. 1. Reprenons l'exemple du jeu de cartes avec les évènements $A = \{\text{obtenir une figure}\}$ et l'évènement $B = \{\text{obtenir un pique}\}$. L'évènement $A \cap B$ correspond donc à $A \cup B = \{$ obtenir un pique ou obtenir une figure ou obtenir une figure de pique$\}$. L'évènement $A \cap B = \{\text{obtenir une figure de pique}\}$ et $B^c = \{$ ne pas obtenir un pique$\}$.

2. Si nous considérons un lancer de dés (à six faces) avec les évènements $A = \{\text{obtenir un nombre pair}\}$ et $B = \{\text{obtenir un nombre impair}\}$, ces deux évènements sont incompatibles : $A \cap B = \emptyset$.

Exercices à traiter : exercices $14, 16$ et 20 page 310.

14.3 Loi de probabilité sur un ensemble fini

Voyons à présent de quelle manière il est possible de faire des probabilités à partir d'une expérience aléatoire. Débutons par un exemple.

Exemple 14.3.1. Considérons un jeu de pile ou face. L'univers associé est $\Omega = \{P, F\}$ où P désigne l'issue pile et F l'issue face. Si nous souhaitons décrire l'aléa associé, il est donc nécessaire de préciser avec quelle probabilité les issues P et F sont obtenues. Cela revient à attribuer des nombres p_1 et $_2$, compris entre 0 et 1, correspondant à ces probabilités. Ainsi, si la pièce est équilibrée nous aurions

$$\mathbb{P}(F) = \frac{1}{2} = p_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(P) = \frac{1}{2} = p_2.$$

Si jamais la pièce n'était pas équilibrée, nous pourrions obtenir plus souvent P que F. Par exemple,

$$\mathbb{P}(F) = \frac{1}{3} = p_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(P) = \frac{2}{3} = p_2.$$

Dans les deux cas présentés ci-dessus, les nombres p_1 et p_2 (décrivant l'aléa) correspondent à une loi de probabilité sur l'ensemble $\{P, F\}$. Pour traiter le cas général, il est nécessaire de considérer un univers comportant plus de deux issues possibles.

Dans cette section nous considérons donc un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_d\}$ composé de $d \in \mathbb{N}$ issues distinctes $\omega_1, \ldots, \omega_d$. Il est à noter que le nombre d sera toujours déterminer par les données de l'énoncé d'un exercice. Lors du pile ou face, nous avions

$$d = 2 \quad , \quad \omega_1 = P \quad \text{et} \quad \omega_2 = F.$$

Si nous avions procédé à un lancer de dé (à 6 faces) nous aurions eu

$$d = 6, \quad \omega_1 = \text{« obtenir 1 »}, \quad \omega_2 = \text{« obtenir 2 »}, \quad \ldots, \quad \omega_6 = \text{« obtenir 6 »}.$$

Dans le cas général, nous devons donc préciser la probabilité p_i d'obtenir l'issue ω_i pour $i = 1, \ldots, d$.

Définition 14.3.1.

1. *Définir une* **loi de probabilité** *sur cet univers Ω correspond à associer à chaque issues ω_i, $i = 1, \ldots, d$ un nombre réel $p_i \in [0, 1]$ tel que*

$$p_1 + \ldots + p_d = 1$$

Le nombre p_i (pour $i = 1, \ldots, d$) correspond à la probabilité que l'évènement $\{\omega_i\}$ se réalise. Autrement dit $\mathbb{P}\big(\{\omega_i\}\big) = p_i$ pour tout $i = 1, \ldots, d$. L'ensemble des nombres $(p_i)_{i=1,\ldots,d}$, décrivant le comportement de l'aléa, est une loi de probabilité sur l'ensemble Ω.

2. *Si $A \subset \Omega$ est un évènement $\mathbb{P}(A)$ correspond à la somme des probabilités des évènements élémentaires composant A.*

Remarque. Il est important de noter que, pour tout évènement $A \subset \Omega$, nous avons

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$$

De plus, l'évènement certain Ω se réalise avec une probabilité 1 : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Tandis que l'évènement impossible de réalise avec une probabilité nulle : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Traitons un exemple pour illustrer ceci et constater que les raisonnement mis en jeu sont véritablement élémentaires.

Exemple 14.3.2. Supposons que nous ayons à disposition un sac contenant six boules (indiscernables au touché) dont une Rouge, deux Oranges et trois Bleues. Si nous mettons en place l'expérience aléatoire suivante : « tirer une boule du sac, au hasard » il est possible d'associer une loi de probabilité à l'univers $\Omega = \{\text{R}, \text{O}, \text{B}\}$.Voici la loi de probabilité que nous obtiendrons :

Issue ω_i	R	O	B
probabilité p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Puisque nous avons 1 possibilité sur 6 d'obtenir une boule *rouge*, 2 possibilités sur 6 pour obtenir une boule orange et 3 possibilités sur 6 pour obtenir une boule bleue. Ainsi, si nous voulions calculer la probabilité de l'évènement $A = \{\text{ne pas obtenir une rouge}\}$ nous aurions : $A = \{B, O\}$ donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(O) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

Exercices à traiter : $22, 23, 24$ et 26 page 311.

Fréquence et probabilité

Souvent, nous pouvons avoir accès à la fréquence d'un évènement. Cette fréquence est reliée à la probabilité de cet évènement par le Théorème de la loi forte des grands nombres (du à Kolmogorov en 1929) dont nous donnons un énoncé simplifié ci-dessous.

Théorème 42 (Loi forte des grands nombres)**.** *Lorsque nous répétons, dans les mêmes conditions, n fois une expérience aléatoire. La fréquence (observée) d'un évènement se rapproche de la probabilité (théorique) de cet évènement lorsque n devient de plus en plus grand.*

Remarque. Typiquement, cela signifie qu'après avoir effectuer un certain nombre de lancer d'une pièce équilibrée, nous obtiendrons autant de pile que de face.

Exercice à traiter : 32 page 312.

Equiprobabilité

Dans de nombreux exemples (lancer de dés, pile ou face, etc. . .) les probabilités p_i (pour $i = 1, \ldots, d$) des évènements élémentaires sont toutes égales : il s'agit d'une situation ***d'équiprobabilité***.

Proposition 43. *Considérons, dans une situation d'équiprobabilité, un univers Ω composé de $d \in \mathbb{N}$ éventualités distinctes, nous avons alors les résultats suivants*

1. *La probabilité de chaque évènement élémentaire vaut $p = \frac{1}{d}$.*
2. *Si A est un évènement alors*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\textit{nombre d'issues réalisant } A}{\textit{nombre d'issues totales composant } \Omega}$$

Démonstration. Démontrons la proposition précédente.

1. Puisque Ω est composé de d évènements élémentaires, nous avons $\Omega = \{\omega_1; \ldots; \omega_d\}$ avec $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ (pour tout $i = 1, \ldots, d$). De plus,

$$p_1 + \ldots + p_d = 1$$

En outre, puisque nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, nous avons $p_1 = \ldots = p_d$. Donc

$$d \times p_d = 1$$

d'où le résultat.

2. Si A est composé de k issues (évènements élémentaires) parmi les d possibles, nous avons alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{d} + \ldots + \frac{1}{d} = \frac{k}{d}.$$

$\square$

Exemple 14.3.3. Supposons que Sofiane ait un C.D. de dix morceaux proposant une compilation de

- trois morceaux de musique classique (notée C),
- trois morceaux de jazz (notée J),
- deux morceaux de death metal (notée DM),
- deux morceaux d'électro (notée E).

Il place le C.D. en mode « shuffle » dans sa chaine hi-fi : laquelle choisit donc, au hasard, l'un des titres de la compilation. Nous sommes en situation d'équiprobabilité (toutes les pistes ont la même chance d'être choisie) et obtenons les probabilités suivantes :

Issue ω_i	C	J	DM	E
probabilité p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

où les lettres C, J, DM et E correspondent de manières évidentes aux différents styles de musique composant le C.D. .

Voyons un deuxième exemple dans lequel nous allons utiliser **un arbre pondéré** pour modéliser la situation.

Exemple 14.3.4. Nous supposons que lorsqu'un couple attend un enfant, il est équiprobable d'avoir une fille (l'évènement associé est noté F) ou un garçon (noté G). Quelle est la probabilité d'avoir deux garçons ? Quelle est la probabilité d'avoir une fille en second ?

Pour modéliser ceci, nous allons dessiner un arbre sur lequel nous allons placer les différents évènements possibles ainsi que les probabilités associées.

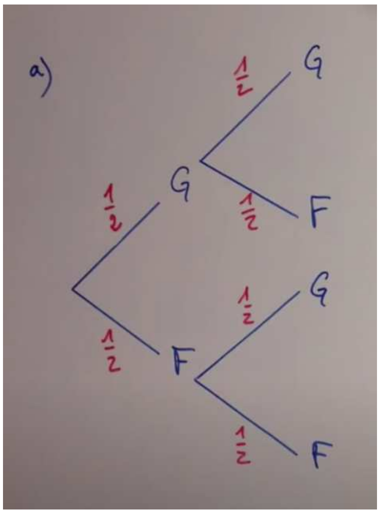


FIGURE 14.1: Arbre pondéré

Commentons un instant cette figure :

- Il important qu'à chaque embranchement la somme des poids soit égale à 1. Par exemple, au premier embranchement, nous avons bien $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. [1]
- La probabilité d'un chemin s'obtient **en multipliant** les poids le composant.

Nous constatons que la probabilité d'obtenir deux garçons correspond au premier chemin (celui passant par les évènements G et G). D'après ce qui précède, nous en déduisons donc

$$\mathbb{P}(\text{« d'avoir deux garçons »}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Pour résoudre la deuxième question, nous constatons que deux chemins sont envisageables (le deuxième et le quatrième qui termine par l'évènement F) ; nous devrons donc additionner les probabilités associés à chacun de ces chemins. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\text{« d'avoir une fille en second »}) = \mathbb{P}(\text{deuxième chemin}) + \mathbb{P}(\text{quatrième chemin}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Remarque. Une **méthode alternative** consisterait à utiliser **un tableau à double entrée** (dans lequel la première ligne correspond au premier enfant et la premier colonne au deuxième). Il suffira ensuite de compter les couples envisageables et de remarquer que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. Voyons plutôt,

1. Si jamais le fait d'avoir une fille ou un garçon n'était pas équiprobable, nous aurions des valeurs différentes : par exemple, si la probabilité d'avoir un garçon vaut $\frac{1}{4}$, nécessairement nous placerions la valeur $\frac{3}{4}$ au dessus de la branche menant à l'évènement F.

	G	F
G	(G ;G)	(G ;F)
F	(F ;G)	(F ;F)

Puisqu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité (sur les 4 couples envisageables), nous avons

$$\mathbb{P}(\text{« d'avoir deux garçons »}) = \mathbb{P}\big((G;G)\big) = \frac{1}{4}$$

et

$$\mathbb{P}(\text{« d'avoir une fille en second »}) = \mathbb{P}\big((G;F)\big) + \mathbb{P}\big((F;F)\big) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Exercices à traiter : 35 page 312 ; 38 et 39 (Q1 et Q2c seulement) page 313 ; 67 page 319.

14.4 Quelques formules

Comme nous l'avons vu un peu plus tôt dans ce chapitre, il est possible de construire de nouveaux évènements à partir d'autres (union, intersection, complémentaire). Nous allons présenter, ci dessous, deux formules générales permettant de calculer la probabilité de ces évènements. A nouveau, A et B désignerons deux évènements d'un univers Ω.

14.4.1 Probabilité d'une union

Proposition 44. *Pout tous évènements A et B nous avons*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \tag{14.4.1}$$

Remarque. En particulier, si A et B sont ***incompatibles*** nous avons

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

puisque $A \cap B = \emptyset$ et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. ***Attention, ce genre de formule n'est pas valable pour l'intersection !***

Démonstration. 1. Supposons, dans un premier temps que A et B sont des évènements incompatibles. Ainsi, l'évènement $A \cup B$ est uniquement composé de la somme des évènements complémentaires composant A et B (puisque A et B sont disjoints). Autrement dit, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

2. Traitons le cas général en introduisant l'ensemble A_1 composé des évènements élémentaires de A n'appartenant pas à B. Puisque $A_1 \cup B = A \cup B$ et que $A_1 \cap B = \emptyset$ (par construction) nous avons

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A_1 \cup B) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B) \tag{14.4.2}$$

d'après le point précédent. De plus, les évènements A_1 et $A \cap B$ sont également incompatibles (puisque A_1 comprend tous les éléments de A n'appartenant pas à B). En outre, $A_1 \cup (A \cap B) = A$, ainsi d'après le point précédent

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\big(A_1 \cup (A \cap B)\big) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A \cap B) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Il suffit alors de substituer cette nouvelle expression de $\mathbb{P}(A_1)$ dans l'équation (14.4.2) pour conclure.

□

14.4.2 Probabilité du complémentaire

Rappel : nous désignons, sans distinction, l'évènement complémentaire de A par $\bar{A}$ ou A^c.

Proposition 45. *Soit A un évènement de l'univers Ω alors*

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A). \tag{14.4.3}$$

Démonstration. Par définition, A et son complémentaire A^c (ou $\bar{A}$) sont incompatibles et $A \cup A^c = \Omega$ (puisque A^c contient tous les éléments de l'univers Ω n'appartenant pas à A). Ainsi, en utilisant la forme de l'union et le fait que Ω est un évènement certain, nous avons

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

d'où le résultat. □

Traitons à présent un exemple permettant de manipuler les deux formules précédemment introduites.

Exemple 14.4.1. Considérons trois évènements A, B et C issus d'une expérience aléatoire. Nous supposons que A et B sont des évènements incompatibles et que

$$\mathbb{P}(A) = 0,4 \quad \mathbb{P}(B) = 0,3 \quad \mathbb{P}(C) = 0,45 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B \cap C) = 0,2.$$

A partir de ces données, calculons $\mathbb{P}(A^c)$, $\mathbb{P}(B \cup C)$ et $\mathbb{P}(B \cup C)$.

- en utilisant la formule de l'évènement complémentaire (14.4.3), nous avons

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0,6$$

- Puisque A et B sont incompatibles, la formule de l'union (14.4.2) nous fournit

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0,7$$

- A nouveau, grâce à la formule de l'union (14.4.2), nous obtenons

$$\mathbb{P}(B \cup C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) = 0,55$$

Exercices à traiter : 24 page 310, 12 page 309, 41 page 313, 60 page 318, 62 page 319.

14.5 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Déterminer un univers ainsi que les issues d'une expérience aléatoire. Etre capable de déterminer une loi de probabilité associé à une expérience aléatoire.
- Savoir reconnaitre une situation d'équiprobabilité et d'en utiliser les propritétés.
- Maitriser les opérations élémentaires (union, intersection, complémentaire) entre différents évènements et utiliser les formules permettant de calculer les probabilités associées.
- Modéliser, à l'aide d'un arbre ou d'un tableau à double entrée, une expérience aléatoire.