Chapitre 2

Continuité et dérivation

2.1 Dérivation d'une fonction et monotonie

Pour étudier les variations d'une fonction compliquée, il est nécessaire de déterminer le signe de la fonction dérivée f', celui-ci permet d'en déduire les variations de f :

Théorème 3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable alors*

- $f'(x) \geq 0$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *si et seulement si la fonction est croissante sur* $\mathbb{R}$.
- $f'(x) \leq 0$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *si et seulement si la fonction est décroissante sur* $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = 0$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *si et seulement si la fonction est constante sur* $\mathbb{R}$.

Fonctions polynomiales

Nous devons donc être en mesure de calculer la dérivée d'une fonction donnée. Pour cela, il convient tout d'abord d'apprendre à dériver les puissances de x.

Proposition 4. *Le tableau suivant fournit le domaine de définition ainsi que la dérivée de fonctions usuelles.*

Fonction	*Domaine définition*	*Expression*	*Domaine dérivation*	*Dérivée*
constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
identité	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
cube	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
inverse	$\mathbb{R}_*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
racine	$\mathbb{R}_+$	$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque. Il est utile de retenir la formule suivante qui englobe les cas précédents. Soit $n \in \mathbb{Z}$ (avec $n \neq 0$) et $f(x) = x^n$ alors

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

La plupart du temps, les règles précédentes sont utilisées avec la proposition suivante. Celle-ci explique comment dériver la somme de deux fonctions ou comment dériver une fonction multipliée par une constante.

Proposition 5 (Dérivée d'une somme)**.** *Soient u, v deux fonctions dérivables et $a \in \mathbb{R}$.*

1. $\big(au\big)' = au'$.

2. $\big(u + v\big)' = u' + v'$.

Voyons cela sur un premier exemple.

Exemple 2.1.1. Au lieu de présenter de nombreux points théoriques, traitons l'exemple suivant en détail. Soit $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 12$. Tout d'abord nous voulons calculer $f'(x)$. Les règles usuelles montrent que

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3.$$

Il faut ensuite résoudre $f'(x) = 0$ à l'aide de Δ (celui-ci vaut $\Delta = 64 - 36 = 28 = 4 \times 7 > 0$. Il y a donc deux solutions $x_1 = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$ et $x_2 = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$. Par suite, nous avons

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En conséquence, la fonction f admet les variations suivantes (il est possible de vérifier ceci à la calculatrice) :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque. Nous verrons plus tard comment l'utilisation de la calculatrice permet d'avoir une intuition concernant les limites de la fonction lorsque $x \to \pm\infty$.

Exercices à traiter : 25,27,28 page 20 ; 34 (Q1) +35(Q1) +37(Q1,Q2) page 21 (calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f) ; 72p25 (application).

Fonction exponentielle et dérivation

Par moments, il faudra être capable de dériver des fonctions impliquant l'exponentielle.

Proposition 6. *La fonction exponentielle* $\exp : x \mapsto e^x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $(e^x)' = e^x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. A toutes fin utiles, rappelons quelques propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad ; \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \quad ; \quad (e^a)^b = e^{ab} \quad \text{pour tout} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ces propriétés sont à comparer avec celles des puissances de 10.

Exercices à traiter : fiche d'exercices de 1*ère* 34(Q3,Q4) page 20.

La plupart du temps, nous aurons à faire une fonction un peu plus complexe que la simple exponentielle.

Proposition 7. *Soit* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable alors* $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. Finalement, cette formule montre juste que pour dériver $x \mapsto e^{u(x)}$ il suffit de savoir dériver $x \mapsto u(x)$.

Exemple 2.1.2.
1. Dérivons $x \mapsto e^{-3x+4}$. Ici $u(x) = -3x + 4$ donc $u'(x) = -3$ et $(e^{-3x+4})' = -3e^{-3x+4}$.
2. Dérivons $x \mapsto e^{x^2}$. Ici $u'(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$ et $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.

Exercices à traiter : 29 (Q3,Q4,Q6) page 2 ; 49(Q2,Q4) page 22 et 48(Q1,Q2) page 22.

Enfin, régulièrement nous aurons à dériver un produit de fonction impliquant l'exponentielle. Nous aurons donc besoin du résultat suivant.

Proposition 8 (Dérivée d'un produit)**.** *Soient* u, v *deux fonctions dérivables et* $a \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Remarque. En particulier, lorsque $v = u$, le point 3 nous assure que $(u^2) = u'u + uu' = 2uu'$. Il est primordial de retenir les faits suivants :

la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées !

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 2.1.3. Etudions sur $\mathbb{R}$ les variations de $f(x) = (3x+1)e^{x^2}$. Il s'agit d'un produit, posons alors

$$u(x) = 3x + 1 \quad \text{et} \quad v(x) = e^{x^2}$$

Ainsi $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2xe^{x^2}$. Par suite,

$$f'(x) = 3e^{x^2} + (3x+1)2xe^2 = e^{x^2}(6x^2 + 2x + 3).$$

Il suffit d'étudier le signe de la dérivée pour déterminer les variations de la fonction f. Pour traiter le deuxième facteur, il faut employer Δ. Ici, $\Delta = 2^2 - 4 \times 6 \times 3 = -68 < 0$ donc $6x^2 + 2x + 3$ est du signe de $a = 6 > 0$. Comme il a été vu en première,

$$e^{x^2} > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nous avons donc montré que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercices à traiter : ; 47(Q1,Q2), 48(Q1,Q2) et 50(Q3) page 22 ou 73 page 25 (applications)
.

2.1.1 Fraction rationnelles

Nous abordons maintenant le cas des fractions rationnelles. Il s'agit simplement d'un quotient de polynômes. Tout d'abord, rappelons comment étudier le signe d'un quotient.

Exemple 2.1.4. $x \mapsto \frac{x+4}{x-2} \geq 0$ est un fraction rationnelle. Il faut être prudent avec l'ensemble de définition, le dénominateur n'a pas le droit d'être égale à zéro (valeur interdite). Observons au passage que déterminer le signe du quotient s'effectue de la même manière que pour un produit.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+4}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Voyons à présent comment dériver un quotient.

Proposition 9 (Dérivée d'un quotient)**.**
Si v ne s'annule pas,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Remarque.
la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées !

Traitons un exemple d'application.

Exemple 2.1.5. Soit $h(x) = \frac{-12x+3}{3x+1}$. Déterminons l'ensemble de définition en résolvant $3x+1 = 0$, nous voyons que h est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{3}\}$. Déterminons ensuite h', pour cela nous allons utiliser la formule de dérivation d'un quotient avec

$$u(x) = -12x + 3 \quad \text{et} \quad v(x) = 3x + 1.$$

Par suite, $u'(x) = -12$ et $v'(x) = 3$ c'est pourquoi nous obtenons

$$h'(x) = \frac{-12 \times (3x+1) - (-12x+3) \times 3}{(3x+1)^2} = \frac{-21}{(3x+1)^2} < 0.$$

h est donc une fonction croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{3}[$ et $]-\frac{1}{3}; +\infty[$.

Exercices à traiter : 46 page 22.

Equations de tangentes

Parfois, il vous sera demander de déterminer l'équation d'une tangente à une courbe C_f en un point donnée x_0 pour ensuite faire une étude de position relative (entre la courbe et sa tangente). Avant de traiter un exemple, rappelons comment déterminer l'équation d'une tangente en un point.

Proposition 10. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in \mathbb{R}$. L'équation de la tangente T_{x_0} est donnée par*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Voyons de quelle manière cela intervient dans un exercice.

Exemple 2.1.6. Reprenons l'étude de la fonction $f(x) = (3x+1)e^{x^2}$ dont la dérivée vaut $f'(x) = e^{x^2}(6x^2 + 2x + 3)$ et déterminons l'équation de la tangente T_0.

Pour cela, il suffit d'appliquer la formule du cours au point $x_0 = 0$:

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 3x + 1.$$

Observons également le fait suivant : chercher à savoir si une courbe possède des tangentes horizontales revient à résoudre l'équation $f'(x) = 0$ (puisque $f'(x)$ correspond au coefficient directeur d'une tangente).

Exemple 2.1.7. En quel point, la courbe $\mathcal{C}_f$ associée à la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 8$ admet-elle une tangente horizontale ?

Dérivons f, nous trouvons que $f'(x) = 2x - 4$. Par suite,

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2.$$

Déterminons à présent l'équation de la tangente T_2 :

$$T_2 : \quad y = f'(2)(x-2) + f(2) = 0 + 4$$

T_2 est donc la droite horizontale d'équation $y = 4$.

Exercices à traiter : 38,39 page 21.

Bien que nous n'allons par aborder ce point en détail, il est possible de s'interroger quant à la position relative d'une courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à une de ses tangentes T. Autrement dit, nous souhaitons savoir à quels moments, $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessous (resp. en dessous, resp. coupe) la droite T. Pour cela il suffit d'étudier le signe de la différence $d(x)$ définie par

$$d(x) = f(x) - (ax + b)$$

où $y = ax + b$ est l'équation réduite (calculée au préalable) d'une tangente. Ainsi, nous obtenons les cas de figures suivant :

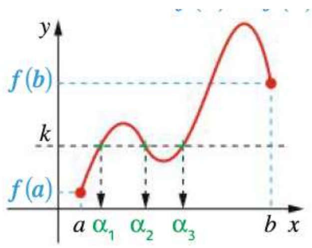
- lorsque $d(x) > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de T.
- lorsque $d(x) < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ se trouve en dessous de T.
- lorsque $d(x) = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ coupe T.

2.2 Continuité

Dans cette section, nous allons étudier une propriété plus fine des fonctions. Il s'agit de la notion de continuité. L'intérêt de cette étude permet de répondre à la question suivante : étant donnée la fonction $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$,

$$\text{est-t-il possible de résoudre} \quad f(x) = 10\,?$$

Il est à noter que la résolution algébrique de cette équation est exclue car trop complexe, il faut donc trouver d'autres approches. En expérimentant une tentative graphique, il semblerait que le nombre de solutions (à l'équation) dépende de l'allure de la courbe. Par exemple, sur la figure ci-dessous,



nous constatons qu'en fonction de la position de la droite $y = k$, nous pourrions ne pas avoir de solutions. En effet,

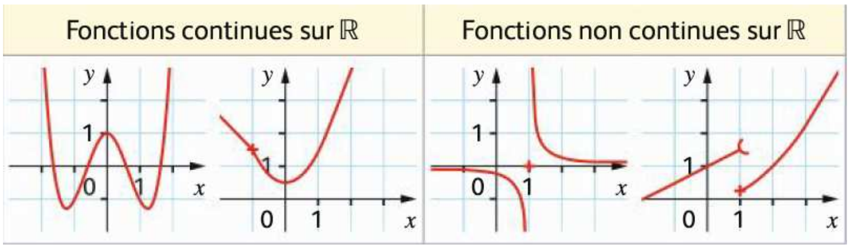
- si cette droite est trop basse, elle ne rencontrera pas la courbe C_f et l'équation n'aura pas de solutions.
- si cette droite est placée comme sur la figure, elle rencontre C_f en plusieurs points ; il y a donc 3 solutions.
- si elle était placée légèrement plus haut, il n'y aurait qu'un seul point d'intersection et donc qu'une unique solution.

Ces observations mènent à la première propriété que doit vérifier la fonction.

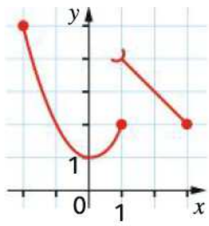
Définition 2.2.1. *Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **continue** si sa courbe représentative C_f peut se tracer d'un seul trait, « sans avoir à lever le crayon ».*

Exemple 2.2.1. Voyons ce que cela donne visuellement.

1. Débutons par des fonctions définies sur $\mathbb{R}$



2. Voici un autre exemple de fonction qui est continue sur $[-2;1]$ mais pas sur $[-2;3]$ puisqu'il y a une discontinuité (un saut) en $x = 1$.



Il convient maintenant d'identifier les fonctions continues de celles qui ne le sont pas. Fort heureusement, les choses se passent plutôt bien et, en pratique, la quasi totalité des fonctions étudiées en exercice seront continues.

Proposition 11 (Continuité et fonction usuelles)**.**

1. *Les fonctions polynomiales sont continues sur* $\mathbb{R}$.
2. *La fonction inverse est continue sur* $]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$ *mais pas en* $x = 0$.
3. *La fonction exponentielle est continue sur* $\mathbb{R}$.
4. *Toute fonction dérivable sur un ensemble* I *est aussi continue sur* I.

Remarque.

1. La continuité est préservée par les opérations d'addition, de soustraction ou de multiplication. Autrement dit, si f et g sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ alors $f+g$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour le passage au quotient, il faut exclure les points en lesquels la fonction s'annule. Par exemple, $x \mapsto x-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme de degré 1) mais s'annule en $x = 1$. Par suite, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est continue sur $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$ mais pas en $x = 1$.
3. Par convention, les flèches obliques présentent dans un tableau de variation indiquent que la fonction **continue** et **strictement monotone**.

Voyons sur un exemple.

Exemple 2.2.2. La fonction $f(x) = (2x+1)e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'il s'agit d'un produit de deux fonction continues sur $\mathbb{R}$ (la fonction $x \mapsto 2x+1$ avec la fonction $x \mapsto e^x$).

Exercices à traiter : 42 page 21.

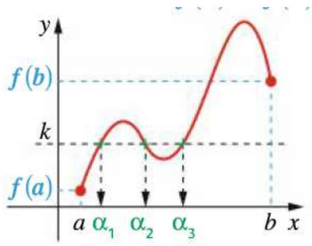
Pour résoudre notre problème initial, il est nécessaire de voir quel rôle joue la monotonie d'une fonction dans cette histoire.

2.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection

Théorème 12 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$*

$$\text{l'équation} \quad f(x) = k \quad \text{admet au moins une solution dans l'intervalle} \quad [a; b].$$

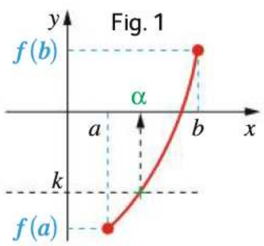
C'est ce que nous avions observé sur la figure

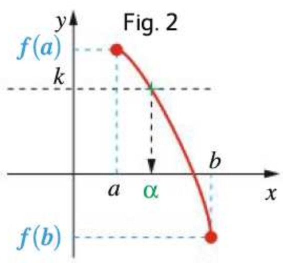


Parfois, il est préférable d'avoir une solution **unique**, pour cela il faut ajouter une hypothèse additionnelle.

Théorème 13 (Théorème de la bijection)**.** *Soit f une fonction continue et **strictement monotone** sur $[a; b]$. Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$*

$$\text{l'équation} \quad f(x) = k \quad \text{admet une unique solution dans l'intervalle} \quad [a; b].$$





Remarque.

1. L'hypothèse de monotonie se vérifie facilement en étudiant les variations de la fonction (à travers le signe de sa dérivée f').
2. En particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors le théorème de la bijection nous assure que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [a; b]$.

3. Le mot *bijection* est le nom savant utilisé pour désigner une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ pour laquelle tout élément y se trouvant entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent $\alpha \in [a;b]$.

Voyons maintenant comment répondre à la question posée en début de chapitre à l'aide de ces nouveaux résultats.

Exemple 2.2.3. Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $[-1;2]$, elle est donc continue sur cet intervalle. L'étude de la dérivée nous permet d'obtenir le tableau suivant.

x	-1		1		2
$f(x)$	18	$\searrow$	2	$\nearrow$	9

En particulier, ce tableau nous assure que $f(x) \in [2;18]$.

1. Puisque $0 \notin [2;18]$ (l'intervalle d'arrivée), l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution. Graphiquement, la droite $y = 0$ ne rencontre jamais la courbe C_f.

2. D'après le tableau, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-1;1]$. De plus, $10 \in [2;10]$ (l'intervalle d'arrivée). Alors, d'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution $\alpha \in [-1;1]$ (l'intervalle de départ) de l'équation $f(x) = 10$.

x	-1		α		1
$f(x)$	18	$\searrow$	10	$\searrow$	2

Ensuite, pour déterminer un encadrement de α, il suffit d'utiliser la calculatrice pour afficher un tableau de valeurs de la fonction sur $[-1;1]$ avec un pas de $0,1$. Nous trouvons alors que

$$f(-0,4) \approx 11,02 \quad \text{et} \quad f(-0,3) \approx 9,943$$

donc $-0,4 < \alpha < -0,3$. En réduisant le pas, il est possible d'affiner la précision de l'encadrement (par exemple en affichant les valeurs de la fonction sur $[-0,4;-0;3]$ avec un pas de $0,01$).

3. Pour résoudre l'équation $f(x) = 5$, nous constatons que la fonction f est continue sur $[-1;2]$ et $5 \in [2;18]$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe au moins une solution à notre problème. En reprenant les arguments du point précédent, il est possible de montrer qu'il existe exactement deux solutions β et γ telles que

$$\beta \in [-1;1] \quad \text{et} \quad \gamma \in [1;2]$$

vérifient $f(\beta) = f(\gamma) = 5$. Il est d'ailleurs possible de montrer (à l'aide de la calculatrice) que $0,2 < \beta < 0,3$ et $1,6 < \gamma < 1,7$. De manière schématique, tout ceci est visible dans le tableau suivant

x	-1	β	1	γ	2
$f(x)$	18	5	2	5	9

Exercices à traiter : 55,56 page 22 et 83 page 27 (applications).