Chapitre 3

Calcul littéral (1ère partie)

3.1 Introduction

Dès l'Antiquité égyptienne ou babylonienne, les scribes disposaient de procédures pour trouver une quantité inconnue soumise à certaines conditions. Par exemple, le Papyrus Rhind (conservé au British Museum de Londres, il date de 1650 av. *J.C.*) comporte l'énoncé suivant :

On doit diviser 100 miches de pain entre dix hommes comprenant un navigateur, un contremaître et un gardien, tous trois recevant double part. Que faut-il donner à chacun ?

Toutefois les méthodes développées et mises en place pour résoudre ce genre de problème n'étaient pas systématiques : chacun utilisait des combinaisons de bouts de recettes pour espérer obtenir la solution du problème.

En 825 le mathématicien arabe Al-Khwarizmi écrit un traité d'algèbre géométrique et introduit le concept d'équation. Il s'agissait d'une égalité entre deux expressions mathématiques comportant dans leurs termes des nombres connus et une quantité inconnue.

Il fallut attendre les travaux de Descartes pour que la quantité inconnue soit désignée par le lettre x. Les mathématiques italiennes du 16ième siècle furent très fécondes quant à la résolution d'équations polynomiales (dans lesquelles x est élevé à une certaine puissance) grâce aux nombreux travaux de Del Fero, Tartaglia, Cardan,... A cet époque, il est prestigieux d'avoir mis au point une méthode permettant de résoudre un grand nombre d'équation.

3.2 Expressions algébriques

3.2.1 Forme factorisée et developpée

Lorsque nous aurons à traiter une expression algébrique, celle-ci pourra se trouver sous forme factorisée (produit ou quotient de facteurs) ou bien sous forme développée (somme de termes). Dans ce chapitre nous allons nous consacrée à la forme développée et reviendrons ultérieurement sur la forme factorisée. Voyons plutôt sur un exemple.

Exemple 3.2.1. La fonction $f(x) = x^2 - 2x - 3$ se trouve sous forme développée, sa forme factorisée est $f(x) = (x+1)(x-3)$.

Remarque.

1. D'une certaine manière, il est possible de retenir qu'une forme **développée ne contient plus de parenthèses et n'implique que des additions et des soustractions** tandis que la forme **factorisée ne fait intervenir des produits de facteurs** (ou, comme nous le verrons plus tard, des quotients).
2. Suivant le problème à résoudre, il faudra être à même de déterminer la forme la mieux adaptée.

3.2.2 Développement

Pour passer d'une forme factorisée à une forme développée, il suffit de développer l'expression en distribuant les termes de chaque facteur pour ensuite effectuer d'éventuelles simplifications. Le procédé inverse, pour factoriser une forme développée, sera traité dans un chapitre ultérieur.

Exemple 3.2.2.

$$\begin{aligned}(2x+1)(-x+3)-2(5x+7) &= 2x\times(-x)+2x\times 3+1\times(-x)+1\times 3+(-2)\times 5x+(-2)\times 7\\ &= -2x^2+6x-x+3-10x-14\\ &= -2x^2-5x-11\end{aligned}$$

Au début des calculs précédents, nous avons donc

1. **distribué** le terme $2x$ dans la deuxième parenthèse. Ceci nous a donné les termes $2x\times(-x)+2x\times 3$.
2. Puis nous avons procédé de manière similaire en **distribuant** 1 dans la deuxième parenthèse et obtenu $1\times(-x)+1\times 3$.
3. Enfin, nous avons effectué des **calculs semblables pour développer** $-2(5x+7)$.
4. Ensuite nous avons rassembler les objets de même nature ensemble : les x^2 ensembles, les x ensembles et les constantes ensembles. Autrement dit, nous avons **simplifier notre expression algébrique**.

Remarque. **Attention :** Il est évident qu'il n'est pas possible de répondre à la question suivante : *combien font* 2 *poneys plus* 1 *chat ?*. Pour les mêmes raisons n'est pas possible de simplifier l'addition $2x+1$. En revanche, il est possible d'additionner les poneys entre eux : 5 poneys moins 2 poneys donne un total de 3 poneys. Par analogie, $5x-2x=3x$.

Exercices à traiter : 49, 50,51 page 52 (exercices courts) ; 53, 54 (algo) page 52 ; 55 page 44 page 52 à faire à la maison.

Identités remarquables

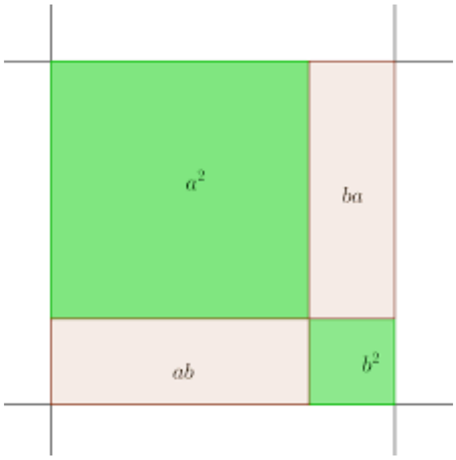
Pour gagner du temps lors de certains développements impliquant un carré, il sera essentiel de **connaître, sur le bout des doigts, les identités remarquables** suivantes.

Proposition 10. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, les identités suivantes sont satisfaites.*

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \textit{et} \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Remarque. Notons que, dans chacune des égalités précédentes, le membre de droite correspond à la forme **développée** tandis que le membre de gauche correspond à la forme **factorisée**.

Les identités remarquables peuvent s'interpréter de manière géométrique. Par exemple, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ signifie que l'aire d'un carré de côté $a + b$ et la même que la somme de l'aire d'un carré de côté a plus celle d'un carré de côté b plus deux fois l'aire d'un rectangle de côté a et b.



Démonstration. Démontrons la première égalité. Pour cela, il suffit d'observer que $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. Ensuite, il suffit de distribuer les termes de la premières parenthèses dans la deuxième. Nous obtenons donc $a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + 2ab + b^2$ puisque $ab = ba$. Il est aisée de reproduire cette démonstration lorsque nous souhaitons traiter $(a-b)^2$ et le même procédé (de distribution) permet d'obtenir la dernière identité remarquable. □

A titre d'illustration, voici un exemple d'application de telles formules.

Exemple 3.2.3.
1. $(2x+3)^2 = 4x^2+12x+9$, ici nous utilisons l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$.
2. $(2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$, ici nous utilisons l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 1$.

Exercices à traiter : 62,63 page 52 ; 64 page 52 à faire à la maison.

3.3 Résolution d'équation

Dans ce qui suit, nous allons résoudre de manière algébrique (par opposition à la méthode graphique vue dans un chapitre précédent) des équations de la forme

$$f(x) = k \tag{3.3.1}$$

où f est une fonction donnée et k un nombre réel connu.

Remarque. Comme nous l'avions observé plus tôt, cela revient à déterminer (s'ils existent) les antécédents x de k par la fonction f.

Définition 3.3.1. *Résoudre l'équation (3.3.1) dans un ensemble de nombre réels $I \subset \mathbb{R}$ revient à déterminer tout les élements appartenant à I pour lesquels l'égalité (3.3.1) est vérifiée.*

Exemple 3.3.1.
1. 2 n'est pas solution de l'équation $x^2-4x+3 = 0$ car $2^2-4\times 2+3 = -1 \neq 0$.
2. 3 est une solution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ puisque $3^2 - 4 \times 3 + 3 = 0$.

Remarque. Une équation peut avoir une unique solution, plusieurs solutions ou aucune solution.

Exercices à traiter : 26 page 96.

3.3.1 Résolution algébrique d'équations

Nous allons voir qu'il est possible de résoudre une équation par le calcul. Il est fondamental de comprendre comment traiter une équation de degré un (ceci signifie que l'équation (3.3.1) n'implique que des constantes ainsi qu'une inconnue x sans que celle-ci soit élevée à une quelconque puissance).

Equation de degré un

Pour résoudre une équation de degré un, il faut et il suffit **d'isoler x dans un membre** de l'égalité. Pour cela, il est possible d'utiliser les opérations élémentaires d'addition, de soustraction, de division, de multiplication, sur chacun des membres de l'équation pour arriver à nos fins.

Exemple 3.3.2. Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'équation $3x + 3 = 5x - 7$.

$$3x + 3 = 5x - 7 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x-5x + 3 = 5x-5x - 7 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x + 3 = -7$$

Poursuivons nos calculs

$$-2x + 3-3 = -7-3 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x = -10 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-2x}{-2} = \frac{-10}{-2}$$

Pour enfin conclure que $x = \frac{-10}{-2} = 5$, nous indiquerons ensuite que l'ensemble des solutions S vaut $S = \{5\}$ signifiant que l'unique solution à l'équation est le nombre réels $x = 5$.

Exercices à traiter : résoudre $x - 3 = 0$, $3x + 5 = 0$; $5x - 1 = x - 9$; $8x - 3 = -5x - 4$ à faire à la maison.

Il est important d'être capable de mettre des problèmes en équations pour ensuite chercher à les résoudre. De manière générale, il convient d'utiliser les lettres $x, y, z, \ldots$ pour désigner une quantité inconnue ; ces inconnues sont alors reliées entre elles par des relations données par l'énoncé, lesquelles fournissent à alors les équations à résoudre.

Exercices à traiter : 68 page 99 ; 72 page 99 à faire à la maison (rappel : l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle est donnée par la formule $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$ où h est une hauteur du triangle et b la base associée).

Comme nous allons le voir, il est possible d'employer le même type de méthodes pour résoudre des inéquations (équations avec une inégalité au lieu d'une égalité).

3.3.2 Résolutions d'inéquations

Les inéquations surviennent assez facilement dans la modélisation de certains problèmes. Par exemple, imaginons que Lola souhaite se rendre dans une salle de sport. Le responsable de la salle lui propose deux abonnements :

- l'un d'entre eux coûte 312 euros à l'inscription puis 3 euros la séance ;
- l'autre coûte 216 euros à l'inscription puis 5 euros la séance.

Pour savoir au bout de combien de séances le premier abonnement est le plus avantageux que le second, Lola cherche à mettre son problème en équation. Si x désigne le nombre de séances, elle obtient

$$312 + 3x < 216 + 5x$$

Nous allons à présent voir comment résoudre ce type de problème.

Définition 3.3.2. *Résoudre une inéquation dans un ensemble de réels $I \subset \mathbb{R}$, c'est trouver* ***tous les éléments*** *de I qui vérifient l'inégalité donnée.*

Exemple 3.3.3.
1. 3 est solution de l'inéquation $2x - 5 > 0$ car $2 \times 3 - 5 = 1 > 0$.
2. -2 n'est pas solution de l'inéquation $2x - 5 > 0$ car $2 \times (-2) - 5 = -9 < 0$.

Dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions de $2x - 5 > 0$ est l'intervalle $]\frac{5}{2}; +\infty[$ car

$$2x - 5 > 0 \quad \Longleftrightarrow x > \frac{5}{2}$$

Voyons plutôt quels moyens ont été mis en oeuvre pour résoudre l'inéquation précédente.

3.4 Outils pour la résolution algébrique d'inéquations

Règles pour résoudre une inéquation

Les propriétés suivantes décrivent les opérations qu'il est possible d'effectuer sur une inéquation.

Propriétés 1. 1. **Ajouter ou soustraire** un même nombre à chaque membre d'une inégalité **ne change pas** le sens de celle-ci.
2. Si $a > 0$ alors **multiplier ou diviser** par a les deux membres d'une inégalité **ne change pas** le sens de celle-ci.
3. Si $a < 0$ alors **multiplier ou diviser** par a les deux membres d'une inégalité **change** le sens de celle-ci.

Exemple 3.4.1. 1. $2x - 5 > 0 \iff 2x > 5 \iff x > \frac{5}{2}$.
2. $4 - 3x < 0 \iff -3x < -4 \iff x > \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$.

Exercices à traiter : 39 page 97 et 50 page 98 ; résoudre $3x + 1 > x - 7$ et $x + 1 < -2x + 6$; résoudre 51 page 98 à la maison et 73 page 99 (rappel : l'aire $\mathcal{A}$ d'un trapèze est donnée par $\mathcal{A} = \frac{(b+B)\times h}{2}$ où b est la petite base, B la grande base et h une hauteur associée.

Observons qu'il est possible d'additionner des inégalités de même sens : si

$$\text{si} \quad a \leq b \quad \text{et} \quad c \leq d \quad \text{alors} \quad a + b \leq c + d.$$

Exemple 3.4.2. Si $x \geq 1$ et $2y \geq -3$ alors $x + 2y \geq -2$.

Inéquations et tableau de signes

Les inéquations que nous étudions peuvent toujours se ramener à une étude de signe. Nous allons donc établir des tableaux de signes de manière algébrique (par opposition à la résolution graphique du chapitre précédent).

Exemple 3.4.3. Prenons la fonction $f(x) = 3x - 9$. Lorsque nous traçons son graphique nous constatons que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point $x = 3$. Par suite, la partie de la courbe se trouvant au dessus de l'axe (Ox) (i.e. là où $f(x) > 0$) débute lorsque $x > 3$; la courbe se trouve sous l'axe des abscisses (i.e. $f(x) < 0$) lorsque $x < 3$.

Tout ceci se résume facilement dans un tableau.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $3x - 9$		$-$	0	$+$	

Et ceci se vérifie par le calcul en résolvant les inégalités $3x - 9 > 0$ et $3x - 9 < 0$.

Remarque. Si jamais nous avions la fonction $g(x) = -3x - 9$ nous n'aurions pas le même tableau de signe : hormis le fait que g s'annule en $x = -3$ plutôt que $x = 3$, les signes + et $-$ sont échangés (par rapport à la fonction $f(x) = 3x - 9$). Ceci provient du signe du coefficient directeur :

$$-3x - 9 \geq 0 \iff -3x \geq 9 \iff x \leq -\frac{9}{3} \iff x \leq -3$$

Nous avons du changé le sens de l'inégalité car nous avons divisé par le nombre $-3 < 0$.

En résumé, nous venons d'observer le résultat suivant.

Proposition 11 (Signe de $ax + b$)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, les résultats suivant donnent le signe du polynôme du premier degré $x \mapsto ax + b$.*

1. *Si $a < 0$ alors*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		$+$	0	$-$	

2. *Si $a > 0$ alors*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		$-$	0	$+$	

Exercices à traiter : Dresser le tableau de signe de $f(x) = 2x - 4$; dresser le tableau de signe de $g(x) = -16x + 8$ à la maison.

3.5 Fonctions linéaires et affines

Faisons un premier lien entre l'aspect graphique des fonctions (via leurs courbes) et les méthodes de résolutions établies dans ce chapitre. Tout au long de l'année, nous allons étudier une liste de fonctions très courantes. Toutes ces fonctions seront appelées fonctions de références car elles apparaitront de manière fréquente durant toute votre scolarité. Nous débutons par les plus simples d'entres elles, les fonctions linéaires et affines.

Définition 3.5.1. *Soit $a \in \mathbb{R}_*$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$ est appelée fonction linéaire. Le coefficient a est désigné sous le nom de* coefficient directeur*.*

Remarque.
1. Il s'agit d'une des fonctions les plus simples car l'image d'un nombre réel x est obtenue en multipliant x par a.
2. La représentation graphique, dans un repère $(O; I; J)$, d'une telle fonction est une droite qui passe l'origine O du repère.
3. Graphiquement, le coefficient directeur s'interprète comme suit :

   - (cas **a>0**). En partant d'un point de la droite, si je me « **décale** » de 1 vers la droite alors je dois « **monter** », de a pour être à nouveau sur la droite.
   - (cas **a<0**). En partant d'un point de la droite, si je me « **décale** » de 1 vers la droite alors je dois « **descendre** », de a pour être à nouveau sur la droite.

Définition 3.5.2. *Soient $a \in \mathbb{R}_*$ et $b \in \mathbb{R}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est appelée fonction affine. Le coefficient a est désigné sous le nom de **coefficient directeur** et b est appelé **ordonnée à l'origine**.*

Remarque. Si $b = 0$, nous retrouvons le cas des fonctions linéaires. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui passe par b.

Exemple 3.5.1. Voici un exemple de fonction affine dont le coefficient directeur est négatif. Graphiquement nous voyons que l'ordonnée à l'origine vaut $b = 2$ tandis que le coefficient directeur vaut $a = -3$.

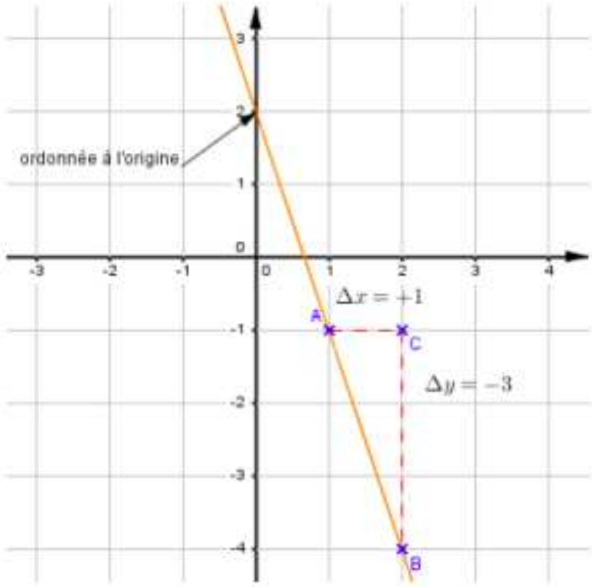


FIGURE 3.1: Représentation graphique de la fonction $f(x) = -3x - 2$

Exercices à traiter : 15,17,18 page 194 ; 20 page 194 à faire à la maison.

3.6 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Développer des expressions polynomiales simples.
- Mettre un problème en équation.
- Résoudre une équation ou une inéquation de degré 1 :
- Utiliser les identités remarquables.
- Dresser un tableau de signe d'une fonction affine.