Chapitre 6

Nombres complexes, applications géométriques

Dans ce chapitre, nous allons approfondir l'utilisation des nombres complexes pour faire de la géométrie dans le plan.

6.1 Applications géométriques

Comme nous l'avons déjà énoncé plus tôt, il est possible de reformuler de nombreux problèmes géométriques en utilisant le langage des nombres complexes. Cette formulation simplifie souvent le problème initial et permet d'utiliser efficacement les nombreuses propriétés de $\mathbb{C}$.

6.1.1 Utilisation du module

Le **module permet de calculer des distances** : si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B alors

$$AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$$

Cette simple observation est parfois suffisante pour caractériser des ensembles.

Proposition 32. *Soient A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B.*

1. *L'ensemble des points M d'affixes z tels que*

$$|z - z_A| = |z - z_B|$$

est la médiatrice du segment $[AB]$.

2. *Si $r > 0$ alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que*

$$|z - z_A| = r$$

est le cercle de centre A et de rayon r.

Exemple 6.1.1. Voyons une première application utilisant le module. Soient A, B et C trois d'affixes respectives $z_A = -1 - 1$, $z_B = 3$ et $z_C = -2 + 3i$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Un simple calcul montre que $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4+i}{-1+4i} = -i$. Donc

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{AB}{AC} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad AB = AC.$$

Le triangle est donc isocèle en A. Des calculs supplémentaires permettraient de vérifier qu'il ne s'agit pas d'un triangle équilatéral.

Remarque. Le lecteur attentif pourrait se demander pourquoi nous avons calculé le quotient $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right|$ plutôt que de regarder, les unes après les autres, les distances $|z_B - z_A|, |z_C - z_A|$ et $|z_C - z_A|$. Comme nous allons le voir dans quelques instants, la raison derrière ceci est lié à l'utilisation des nombres complexes pour déterminer la mesure d'un angle orienté.

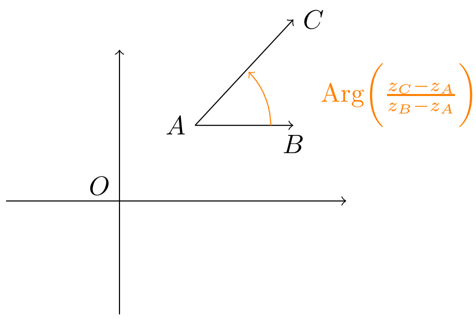
Exercices à traiter : 22,23 page 66 : 39 page 67 à faire à la maison ; 112,113 page 74 ; 121 page 75 à faire à la maison.

6.1.2 Utilisation de l'argument

Proposition 33. *Soient A, B et C trois points distincts du plan, d'affixes z_A, z_B et z_C. Alors, la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est donnée par*

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \operatorname{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi].$$

Ceci est illustré sur la figure ci-dessous.



Remarque. En fonction de la valeur de l'argument, nous pouvons en déduire des informations sur les points. Par exemple,

- $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$ si et seulement si les points sont alignés.
- $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Voyons sur un exemple.

Exemple 6.1.2. Reprenons l'étude du triangle ABC dont les sommets ont pour affixes $z_A = -1-1$, $z_B = 3$ et $z_C = -2+3i$. Nous avions montré que $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$. Ainsi,

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}[\pi]$$

le triangle est donc rectangle en A.

Exercices à traiter : 64 page 69 (rappels) ; 28 page 66 ; 40 page 67 ; 118 page 74 à faire à la maison ; 139 page 77 ; 142 page 78 en DM.

6.2 Transformations du plan

Comme nous allons le voir, de nombreuses transformation du plan peuvent s'écrire sous la forme

$$f(z) = az + b \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{C}*.$$

Autrement dit, cela signifie qu'à un point du plan M (d'affixe z) nous lui associons un point M' d'affixe z' où

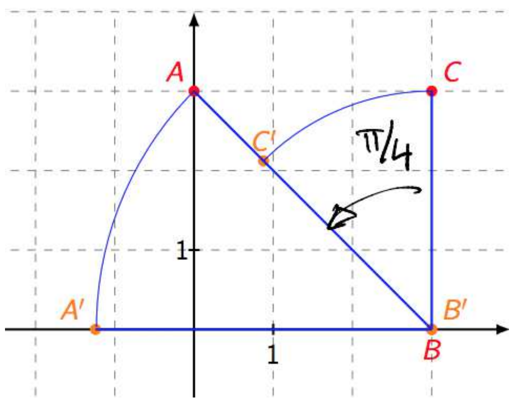
$$z' = az + b. \tag{6.2.1}$$

Ce type de transformation porte le nom de *similitude directe*[1].

Exemple 6.2.1. Considérons la transformation définie par $z' = e^{i\pi/4}(z-3)+3$ et déterminons l'image des points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 3i \quad ; \quad z_B = 3 \quad ; \quad z_C = 3+3i.$$

Une figure laisse penser qu'il s'agit d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ centrée en Ω d'affixe $\omega = 3$.



1. Les similitudes *indirectes* s'obtiennent en utilisant $\overline{z}$ à la place de z dans (6.2.1), elles permettant notamment d'étudier les réflexions par rapport à une droite et les symétries glissées. Par manque de temps, ces transformations ne seront pas étudiées dans ce cours.

Le début de notre étude va tout d'abord s'intéresser à la question suivante : **existe-t-il des points fixes** pour la transformation f ? Autrement dit, nous cherchons à résoudre l'équation :

$$z = az + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad z(1-a) = b. \tag{6.2.2}$$

Deux cas de figures s'offrent à nous :

- Lorsque $a = 1$, l'équation (6.2.2) n'admet aucune solution : il n'y a donc **aucun point fixe**. Cela donnera lieu à des translations.
- Lorsque $a \neq 1$, l'équation (6.2.2) admet **une unique solution**

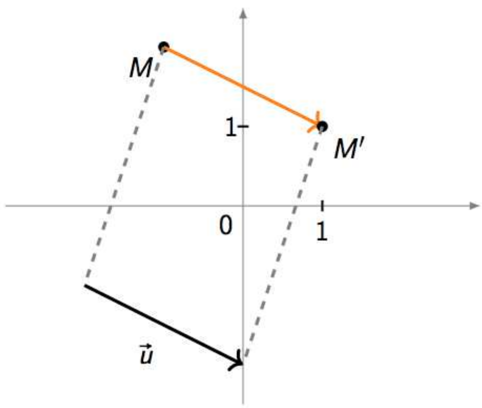
$$\omega = \frac{b}{1-a}. \tag{6.2.3}$$

qui correspond au point fixe de la transformation. Ceci donnera lieu à des homothéties, des rotations ou plus généralement des similitudes de centre Ω (d'affixe ω).

Etudions à présent ces différents cas de figures plus en détails.

6.2.1 Translations

Théorème 34 (Translation)**.** *Si b est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ alors la transformation $z' = z + b$ (i.e. $a = 1$) correspond à une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.*



6.2.2 Homothéties

Supposons que $a = k > 0$ et $k \neq 1$. Dans ce qui suit, ω sera défini par (6.2.3) et correspondra à l'unique point point fixe de la transformation.

Théorème 35 (Homothéties)**.** *L'homothétie de centre Ω (d'affixe ω) et de rapport k est définie par*

$$z' = k(z - \omega) + \omega. \tag{6.2.4}$$

Réciproquement, si $a > 0$ *et* $a \neq 1$ *alors*

$$z' = az + b$$

est l'homothétie de centre Ω *et de rapport* $k = a$.

Remarque. Si $z \neq \omega$, il suffit d'observer que (6.2.4) est équivalente à

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = k.$$

Par suite, en notant M' le point d'affixe z', M le point z, nous obtenons (en reformulant)

$$\frac{\overrightarrow{\Omega M'}}{\overrightarrow{\Omega M}} = k \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega M'} = k \times \overrightarrow{\Omega M}.$$

Ainsi, les points Ω, M et M' sont alignés et en utilisant le module nous en déduisons que

$$\Omega M' = k \times \Omega M.$$

ce qui correspond bien à une homothétie de rapport k centrée en Ω.

6.2.3 Rotations

Supposons maintenant que $a = e^{i\alpha}$ (i.e. $|a| = 1$) et $a \neq 1$. Dans ce qui suit, ω est de nouveau défini par (6.2.3) et correspond à l'unique point point fixe de la transformation.

Théorème 36 (Rotations)**.** *La rotation de centre* Ω *(d'affixe* ω*) et d'angle* θ *est définie par*

$$z' = e^{i\alpha}(z - \omega) + \omega.$$

Réciproquement, si $|a| = 1$ *et* $a \neq 1$ *alors*

$$z' = az + b.$$

est la rotation de centre Ω *et d'angle* $\alpha = \mathrm{Arg}(a)[2\pi]$.

Remarque. Si $z \neq \omega$, l'idée est de nouveau considérer le quotient $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$. En effet, ceci mène à

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}.$$

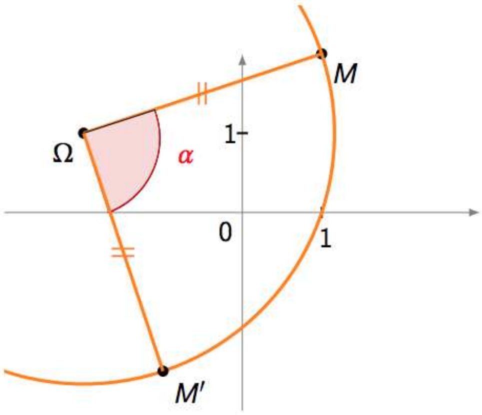
En particulier, en prenant le modèle ceci fourni

$$\Omega M' = \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad M, M' \in \mathcal{C}(\Omega, 1)$$

le cercle de centre Ω de rayon 1. De plus, en utilisant cette fois-ci l'argument, nous en déduisons que

$$(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha[2\pi].$$

Exemple 6.2.2. Considérons la transformation définie par $z' = iz - 2 - 4i$.



1. Cherchons si cette transformation admet un point fixe : résolvons

$$\omega = i\omega - 2 - 4i \quad \Longleftrightarrow \quad \omega(1-i) = -(2+4i) \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = 1 - 3i.$$

2. Observons à présent que

$$\begin{aligned} z' - \omega &= iz - 3 - i \\ &= i(z + 3i - 1) \\ &= i(z - \omega) \\ &= e^{i\alpha}(z - \omega) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de la rotation centrée en Ω d'affixe ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercices à traiter : 16,15 page 84.

6.2.4 Similitudes

Abordons enfin le cas général et supposons que $a \neq 1$ (sans autres restrictions hormis $a \in \mathbb{C}^*$).

Théorème 37. *La similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle α est définie par*

$$z' = ke^{i\alpha}(z - \omega) + \omega.$$

Réciproquement, si $a \neq 1$ alors

$$z' = az + b.$$

est la similitude de centre Ω, de rapport $k = |a|$ et d'angle $\alpha = \mathrm{Arg}(a)[2\pi]$.

Remarque. En d'autres termes, une similitude correspond à la composition d'une rotation et d'une homothétie de **même centre**.

Exercices à traiter : 13 page 84.

Exercice 1. Soit s la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

1. Préciser son rapport, son angle et l'affixe de son centre Ω.
2. Montrer que, pour tout point M, distinct de Ω, d'image M' par s, le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M'

Exercice 2. Dans le plan complexe, considérons les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{3} - i \quad ; \quad z_B = 1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad z_C = \sqrt{3} + i \quad ; \quad z_D = -1 + i\sqrt{3}.$$

1. (a) Donner le module et un argument de chacun de ces quatre complexes.
   (b) Faire une figure et placer ces points.
   (c) Déterminer le milieu du segment $[AC]$ et celui du segment $[BD]$.
   (d) Calculer le quotient $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
2. On considère la similitude (directe) s dont l'écriture complexe est :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2.$$

   (a) Déterminer les éléments caractéristiques de s.
   (b) Déterminer les images respectives des points A', C' et O' par s. Placer ces points sur la figure.
   (c) Que constate-t-on concernants les points A', C' et O'. Démontrez-le.