Chapitre 7

Calcul intégral

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'opération réciproque de la dérivation. Plus précisément, si f est une fonction donnée nous cherchons F telle que $F' = f$. Nous verrons ensuite de quelle manière cela permet de calculer des aires et nous observerons dans un chapitre ultérieur que cela permet également de calculer des probabilités dans le cadre des variables aléatoires continues.

7.1 Primitives

Comme annoncé ci-dessus, étant donnée une fonction f', nous devons retrouver la fonction f initiale. Voyons sur quelques exemples.

Exemple 7.1.1. Si $f(x) = 6x^2 - 3$ et $F(x) = 2x^3 - 3x + 4$, il n'est pas difficile de montrer que $F' = f$. Nous dirons que F est une primitive de f.

Définition 7.1.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. F est une* ***primitive*** *de f si $F' = f$.*

Remarque. Si F est une primitive de f alors $F + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ l'est aussi. Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

7.1.1 Polynômes

Pour trouver des primitives, il suffit de lire le tableau des dérivées de droite à gauche. Débutons par les polynômes.

Fonction	Domaine définition	Expression	Primitive
constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = p$	$F(x) = px + C$
identité	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + C$
carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$
cube	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{x^4}{4} + C$

Remarque. Plus généralement, si $n \in \mathbb{Z}$, (avec $n \neq -1$) alors les primitives de $x \mapsto x^n$ sont de la forme $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ une constante.

Voyons quelques exemples.

Exemple 7.1.2.
1. Si $f(x) = x^3 + 4x - 2$ alors $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$
2. Si $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$ alors $F(x) = -\frac{2}{x} + x + C$.

Exercices à traiter : 61,62 page 83.

Parfois, nous pouvons tomber sur des expressions plus compliquées : comment déterminer une primitive de

$$f(x) = 2(2x+1)(x^2+x) \quad \text{ou} \quad g(x) = \frac{2x}{(x^2+4)^2} \quad ?$$

Pour cela, il convient d'utiliser les formules de dérivations d'un produit ou d'un quotient.

Proposition 20.
1. *Si f est de la forme $x \mapsto 2u'(x) \times u(x)$ alors f admet pour primitive $x \mapsto u(x)^2$.*
2. *Si f est de la forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)^2}$ (avec $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) alors f admet pour primitive $x \mapsto -\frac{1}{u(x)}$.*

Exemple 7.1.3.
1. Si $f(x) = 2(2x+1)(x^2+x)$ alors $u(x) = x^2 + x$ et $F(x) = (x^2+x)^2 + C$.
2. Si $g(x) = \frac{2x}{(x^2+4)^2}$ alors $u(x) = x^2 + 4$ et $G(x) = -\frac{1}{x^2+4} + C$.

Exercice à traiter : 63 page 83.

7.1.2 Logarithmes et exponentielles

Il reste deux cas de figures à étudier, un peu plus complexes, impliquant la fonction exponentielle et la fonction logarithme.

Proposition 21. *Rappelons tout d'abord quelles sont les dérivées associées à ces deux fonctions de références.*

Fonction	*Domaine définition*	*Expression*	*Primitive*
logarithme	$\mathbb{R}_+$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$
exponentielle	$\mathbb{R}$	$f(x) = ex$	$F(x) = e^x + C$

La plupart du temps, ces fonctions seront mélangées à d'autres et il faudra utiliser les formules suivantes.

1. *Les primitives de $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ (avec $u(x) > 0$) sont de la forme $F(x) = \ln[u(x)] + C$.*
2. *Les primitives de $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ sont de la forme $F(x) = e^{u(x)} + C$.*

Exemple 7.1.4. 1. Si $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ nous avons $F(x) = \ln(x^2+1) + C$.

2. Si $f(x) = 2xe^{x^2+1}$ alors $u(x) = x^2+1$ et $F(x) = e^{x^2+1} + C$.
3. Si $f(x) = -3e^{-3x+4}$ alors $u(x) = -3x+4$ et $F(x) = e^{-3x+4} + C$.

Remarque. Dans certains exercices, il sera demander de déterminer C de sorte que la primitive F vérifie une condition initiale. Par exemple, déterminons la primitive F de $f(x) = -3e^{-3x+4}$ vérifiant $F(2) = 0$. Nous savons déjà que $F(x) = e^{-3x+4} + C$, il ne reste plus qu'à déterminer C :

$$F(2) = 0 \iff e^{-3\times 2+4} + C = 0 \iff e^{-2} + C = 0 \iff C = -e^{-2}.$$

Autrement dit, **l'unique primitive** vérifiant $F(2) = 0$ est : $F(x) = e^{-3x+4} - e^{-2}$.

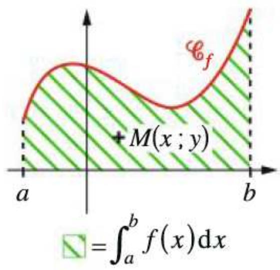
Exercice à traiter : 64 page 83.

7.2 Calcul intégral

La notion d'intégrale permet de calculer des aires ou des probabilités (comme nous le verrons plus tard) en calculent préalablement des primitives.

Définition 7.2.1. *Si F est une primitive d'une fonction f continue sur $[a; b]$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$



Remarque. 1. L'intégrale d'une fonction sur un intervalle est donc un nombre réel et s'interprète comme l'aire comprise entre la courbe $y = f(x)$, l'axe des abscisses, les points a et b. Par convention, l'aire au dessus de l'axe des abscisses et comptée positivement, celle en dessous négativement.

2. Si $a = b$ alors $\int_a^a f(x)dx = 0$ puisque l'aire est nulle.
3. a et b sont les bornes d'intégration.
4. Intuitivement, l'aire sous la courbe s'obtient en additionnant l'aire de petits rectangles (de largeur infinitésimal dx) disposés sous la courbe.

5. La quantité
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
est appelée valeur moyenne de f sur $[a;b]$. Il s'agit d'une généralisation de la moyenne étudiée en statistiques.

Voyons sur quelques exemples.

Exemple 7.2.1. 1. $\int_{-1}^{2} xdx = [\frac{x^2}{2}]_{-1}^{2} = \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{3}{2}$
2. $\int_1^e \frac{1}{t}dt = [\ln t]_1^e = 1$
3. $\int_0^2 e^{-3t+1}dt = [-\frac{1}{3}e^{-3t+1}]_0^2 = \frac{1}{3}(e - e^{-5})$.

Exercices à traiter : 2,4,5,6,7 page 133.

Supposons maintenant que nous voulions calculer l'intégrale d'une fonction plus complexe. Par exemple, la fonction $f(x) = 3x^2 - 6x - 4$. Il serait intéressant de pouvoir traiter les termes les uns après les autres pour ensuite additionner le résultat.

Proposition 22 (Linéarité de l'intégrale)**.** *Soient $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors*
$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

Cette formule semble compliquée alors qu'elle est simple d'emploi et très intuitive. Voyons plutôt.

Exemple 7.2.2. Calculons $I = \int_1^3 3x^2 - 6x - 4dx$. D'après ce qui précède, nous avons
$$I = 3\int_1^3 x^2dx - 6\int_1^3 xdx - 4\int_1^3 1dx = [\frac{x^3}{3}]_1^3 - 3[\frac{x^2}{2}]_1^3 - 4(3-1) = \dots$$

Exercices à traiter : 51,52 page 140 ; 54,55 page 140 ; 62,63 page 141

Les outils présentés ci-dessus, permettent également de calculer l'aire comprise entre deux courbes.

Exemple 7.2.3. Imaginons que nous souhaitions calculer l'aire comprise entre la courbe $y = \frac{1}{x} + x$ et la courbe $y = x$ sur l'intervalle $[1;2]$. En utilisant l'interprétation géométrique de l'intégrale, nous constatons qu'il suffit de calculer la quantité suivante :
$$\int_1^2 x + \frac{1}{x}dx - \int_1^2 xdx.$$

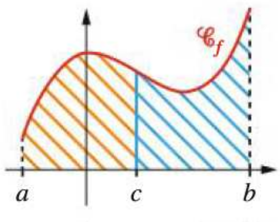
Remarque. Ce genre d'observation sera employé de nouveau lorsque nous étudierons l'indice de Gini dans un prochain chapitre. De nombreuses variations peuvent être obtenues et un dessin suffit amplement pour clarifier la situation.

7.2.1 Propriétés

Voyons quelles sont les propriétés vérifiées par ce nouvel objet.

Proposition 23 (Relation de Chasles)**.** *Soit* $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $c \in [a;b]$ *alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



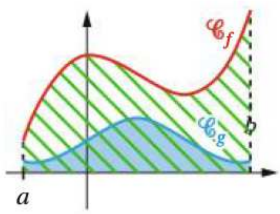
En particulier,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Il est également d'observer le phénomène suivant : si nous arrivons à comparer les fonctions entres elles, alors il est aussi possible de comparer les intégrales associées. Cette observation est évidente en utilisant le point de vue géométrique des aires sous la courbe.

Proposition 24. *Soient* f, g *deux fonctions continues sur* $[a;b]$ *telles que* $g(x) \leq f(x)$ *pour tout* $x \in [a;b]$ *alors*

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$



Exercices à traiter : 65,68 page 141 ; 3 page 135. ; page 150 en DM.