Chapitre 7

Fonctions de référence

7.1 Introduction

Depuis le début de l'année, nous avons manipulé de nombreuses expressions algébriques et étudié un certain type de fonctions : les fonctions affines. Dans ce chapitre, nous allons **agrandir notre catalogue de connaissance en étudiant d'autres fonctions**. Celles-ci sont dites de références car il s'agit de fonctions qui interviennent naturellement dans de nombreuses situations du « quotidien ».

Nous rappelons, à toutes fins utiles, qu'une fonction affine est de la forme $f(x) = ax + b$ avecc $a, b \in \mathbb{R}$. Sa représentation graphique est **une droite** et ses **variations** sont **déterminées** par le **signe du coefficient directeur** a.

Dans ce chapitre, il est important de retenir plusieurs points :

- dans quelle contexte les fonctions de références peuvent intervenir ;
- quelles sont les variations des fonctions de références ;
- quelles sont l'expression de $f(x)$ pour chacune des fonctions de référence.

7.2 Fonction carré

Imaginons que Mélanie souhaite réaliser un *furoshiki* (substitut, d'origine japonaise, en tissu pour remplacer les papiers cadeaux) de forme carrée. Pour cela, elle se rend dans un magasin où le tissu qu'elle a choisi est vendu au prix de 10 euros par m^2. Mélanie modélise cette situation à l'aide d'une fonction S qui a une longueur positive x, en m, associe la superficie $S(x)$ du furoshiki en m^2 (elle pourra ensuite déterminer prix du tissu nécessaire à la fabrication de cet objet). Elle complète ainsi le tableau suivant :

Longueur du côté x	0,3	0,5	1	1,4	2,2	3
Superficice $S(x)$	0,09	0,25	1	21,96	4,84	9

Après réflexion, elle constate qu'elle a utilisé la fonction suivante.

Définition 7.2.1. *La fonction carré est définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2$

Cette fonction intervient dans la modélisation de nombreux problèmes.

Exemple 7.2.1. La fonction carré intervient dans les situations suivantes :

- Prix d'une parcelle de terrain à partir de sa superficie.
- Quantité de pots de peinture permettant de repeindre une surface donnée.
- ....

Voyons ce qu'il est possible d'établir vis à vis des variations de cette fonction.

Proposition 23. *La fonction carré est* ***croissante*** *sur* $[0; +\infty[$ *et* ***décroissante*** *sur* $]-\infty; 0]$. *Autrement dit, nous avons le tableau de variation suivant.*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Remarque. 1. Deux réels positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.

2. Deux réels négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire.
3. La représentation graphique $y = x^2$ correspond à une **parabole** :

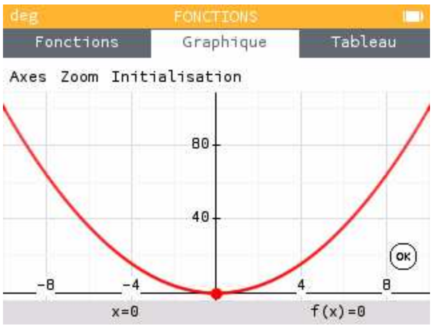

FIGURE 7.1: Fonction $x \mapsto x^2$

Cette courbe est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnée** : ceci provient d'une propriété particulière de la fonction $x \mapsto x^2$; lorsqu'une fonction vérifie la relation suivante

$$f(-x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

nous dirons que **la fonction est paire**, elle vérifie de plus une propriété de **symétrie axiale** par rapport à **l'axe des ordonnées**.

Exercices à traiter :21, 24 (question a,b,c) et 26 (questions a,b) page 195 ; 33 (question 1, 2a et 2b) et 34 (question 1 et 2b) page 195

7.3 Fonction racine carrée

Nous avons déjà rencontré cette fonction lorsque nous cherchions à déterminer la **longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle** ; elle intervient aussi dans la formule permettant de calculer **la longueur d'un segment** dans un repère orthonormé.

Rappels :

- Rappelons que cette fonction est définie comme suit : étant donné un nombre $b \geq 0$, nous dirons que $a = \sqrt{b}$ si
$$a \times a = a^2 = b.$$
- De manière un peu grossière, cette fonction permet de « **défaire le carré d'un nombre** ». D'un point de vue plus géométrique, cela revient à déterminer le côté d'un carré lorsque nous connaissons l'aire de celui-ci.
- Attention, avant la classe de Terminale, la **racine carrée d'un nombre négatif n'a pas de sens**.
- Soient $a, b \geq 0$ alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. Attention $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Rappelons également certains types de calculs déjà rencontrés cette année.

Exemple 7.3.1. 1. Simplifier une racine carrée :
$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

2. Supprimer une racine carrée d'un dénominateur :
$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Voyons à présent son expression formelle ainsi que ses variations.

7.3.1 Variations

Définition 7.3.1. *La fonction racine carrée est définie sur* $[0; +\infty[$ *et sera notée* $x \mapsto \sqrt{x}$.

Il est possible d'étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+$ et admet les variations suivantes :

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

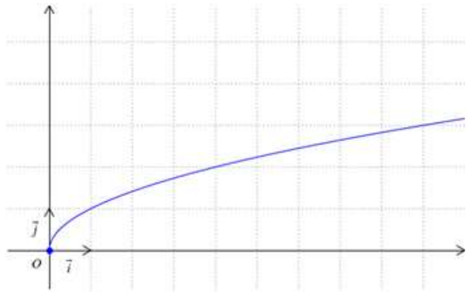

FIGURE 7.2: Fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

Exercices à traiter : 62 (questions a,b) et 66 (questions a,b) page 197 ; 68 (question 1, 2a et 2b) et 69 (question 1 et 2a) page 197.

7.4 Fonction cube

Voici une autre fonction intervenant dans d'autres types de problèmes (impliquant un **volume** par exemple) il s'agit de la fonction qui a un nombre réel lui associe son cube. Voici ses variations.

Proposition 24. *La fonction $x \mapsto x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et admet les variations suivantes :*

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$\nearrow$	

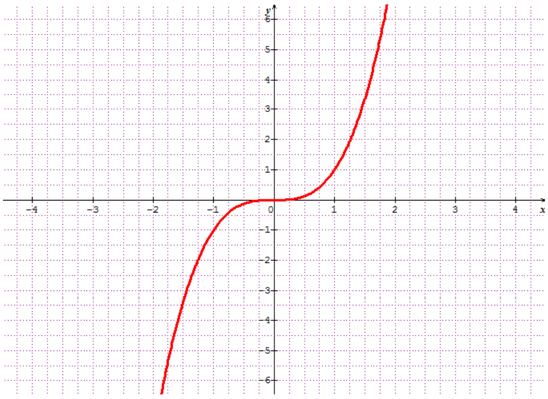

FIGURE 7.3: Fonction $x \mapsto x^3$

Remarque. Observons que la courbe passe par l'origine $(0,0)$ puisque $f(0)=0$. Elle vérifie également une propriété de **symétrie centrale** par rapport à ce même point. Il n'est pas difficile de montrer que l'identité suivante est vérifiée :

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lorsque ce genre d'égalité est satisfaite, il est usuel de dire que la fonction est **impaire**.

Exercices à traiter : 51 (questions a,b,c), 55 (questions a,b) page 197 ; 56 (questions a), 57 page 197..

7.5 Fonction inverse

La fonction inverse intervient dans de nombreux domaines. Par exemple :

- Raphaël souhaite s'inscrire dans une salle de musculation et constate que **l'abonnement mensuel** coûte 35 euros. Il se demande à **combien lui revient le prix d'une entrée** s'il va à une séance par semaine.
- En physique, la loi d'Ohm, nous assure que

  $$U = R \times I$$

  avec I l'intensité du courant, U la tension et R la résistance. Par conséquent, la résistance s'exprime comme $R = \frac{U}{I}$.
- ...

Voyons comment définir formellement cette nouvelle fonction.

Définition 7.5.1. *La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}_* =]-\infty : 0[\cup]0;+\infty[$ (i.e. tous les **réels non nuls**). Il s'agit de la fonction f qui a tout réel non nul associe son inverse.*

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{pour} \quad x \in \mathbb{R}_*$$

Remarque. **La fonction inverse n'est pas définie en** 0, il est usuel de dire que 0 est une **valeur interdite** pour la fonction inverse.

Voici son tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

et la représentation graphique associée (cette courbe porte le nom **d'hyperbole**)

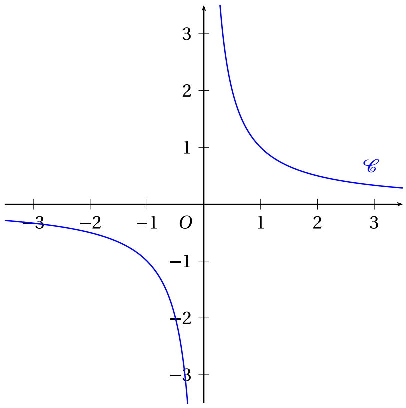

FIGURE 7.4: Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

Remarque. Autrement dit, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est **décroissante** sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. En conséquence, deux réels (non nuls) de même signe et leurs inverses sont rangés dans des ordres contraires.

Exemple 7.5.1.
Puisque $2 \leq 4$ alors, comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante nous avons $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$.

Exercices à traiter : 35 et 36 (questions a, b, g et h) page 195 ; 40 (questions a,b,c), 44 (questions a,b) page 196 ; 45 (questions 1 et 2a et 2d), 46 page 196.