Chapitre 9

Calcul littéral (2ième partie)

Dans un chapitre précédent nous avons vu comment développer des expressions algébriques. Dans l'exemple ci-dessous, il s'agit de passer du membre de gauche au résultat simplifié dans le membre de droite :

$$(3x-1)(4x+2) = 12x^2 + 6x - 4x - 2 = 12x^2 + 2x - 2$$

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'opération inverse : passer du membre de droite $12x^2 + 2x - 2$ au membre de gauche $(3x-1)(4x+2)$. Il s'agit de la factorisation. Cette notion est essentielle pour résoudre des équations algébriques.

9.1 Factorisation

En classe de seconde, plusieurs outils sont à notre disposition pour factoriser une expression algébrique. Observons ces différentes méthodes par le biais d'exemples.

Exemple 9.1.1. ***(Chercher un facteur commun)***

1. $$2x^2 - 4x = 2x \times x - 2x \times 2 \quad = \quad 2x(x-2)$$

   Une fois le facteur commun ($2x$) identifié, il ne reste plus qu'à recopier le reste $(x-2)$ à l'intérieur de parenthèses.

2. Factorisons l'expression suivante

   $$x^2(x-2) + (x-2) = x^2(x-2) + 1(x-2) = (x^2+1)(x-2)$$

   Ici, pour factoriser, il est nécessaire de faire apparaitre le facteur 1 qui était sous-entendu (multiplier par 1 ne change rien, ce facteur est omis la plupart du temps).

3.

$$\begin{aligned}(-x+2)(3x+1)-2(-x+2)(x+4) &= (-x+2)\big[(2x+1)-2(x+4)\big]\\ &= (-x+2)(3x+1-2x-8)\\ &= (-x+2)(x-7).\end{aligned}$$

Si les identités remarquables sont utilisées pour développer une expression, elles sont aussi utiles pour obtenir une factorisation. Pour cela, il suffit de les lire « dans l'autre sens »(cela revient à lire les égalités ci-dessous de gauche à droite) :

$$a^2 + \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \quad \text{et} \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Voyons deux exemples.

Exemple 9.1.2. ***(identité remarquable)***

1. En utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, nous pouvons factoriser l'expression suivante :

$$9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x+4)(3x-4)$$

   Pour cela, il suffit de choisir $a = 3x$ et $b = 4$.
2. En utilisant l'identité $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, nous pouvons factoriser l'expression suivante :

$$4x^2 + 16x + 16 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 2 + 4^2 = (2x+2)^2$$

   Pour cela, il suffit de choisir $a = 2x$ et $b = 4$.

9.2 Résoudre une équation à l'aide d'une factorisation

Comme souvent en mathématiques, nous chercherons à transformer un problème compliqué en un autre, plus simple que nous savons résoudre. Concernant les équations algébriques, cela reviendra à ***factoriser*** notre expression algébrique pour obtenir un produit (nous verrons plus tard le cas des quotients). Nous utiliserons ensuite, les propriétés suivantes qui ramènerons notre problème à la résolution d'une équation de degré un.

Rappelons une règle que nous avons déjà rencontré plus tôt dans l'année.

Propriétés 6. **Produit nul** : $A \times B = 0$ est équivalent à $A = 0$ ou $B = 0$.

Voici plusieurs exemples illustrant la propriété précédente.

Exemple 9.2.1. Traitons d'abord le cas de la recherche de facteur commun.

1. Cherchons à résoudre l'équation : $(2x+1)(x+3) = (2x+1)(-2x+2)$. Tout d'abord, plaçons tous les termes dans le même membre afin de chercher une factorisation.

$$(2x + 1)(x+3) = (2x+1)(-2x+2) \iff (2x+1)(x+3) - (2x+1)(-2x+2) = 0.$$

Identifions ensuite un facteur commun :

$$\begin{array}{rcl} (2x+1)(x+3)-(2x+1)(-2x+2) & = & 0. \\ \iff (2x+1)(x+3+2x-2) & = & 0 \\ \iff (2x+1)(3x+1) & = & 0 \end{array}$$

Nous nous sommes ramenés à une forme du type $A \times B = 0$. Ainsi, d'après la propriété 6, nous avons donc à résoudre les deux équations suivantes :

$$2x+1=0 \quad \text{ou} \quad 3x+1=0$$

En d'autres termes

$$(2x+1)(x+3)=(2x+1)(-2x+2) \quad \iff \quad x=-\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{1}{3}$$

et l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}$, s'écrit $S=\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right\}$.

Remarque. ***Mise en garde*** : il n'est pas correct de simplifier directement l'équation

$$\cancel{(2x+1)}(x+3)=\cancel{(2x+1)}(-2x+2)$$

puisque cette quantité peut être nulle (en effet, $(2x+1)=0 \iff x=-\frac{1}{2}$) ! Cela reviendrait à diviser par 0 ce qui est interdit !

Voyons à présent, l'utilisation des identités remarquables.

Exemple 9.2.2. 1. Si nous souhaitons résoudre l'équation

$$(E): \quad 4x^2-24x+36=0.$$

Il suffit d'observer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$(E): \quad (2x)^2-2\times 2x\times 6+6^2=0.$$

Pour ensuite utiliser l'identité remarquable $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ avec $a=2x$ et $b=6$. Par suite, nous obtenons

$$4x^2-24x+36=0 \quad \iff \quad (2x-6)^2=0 \quad \iff \quad 2x-6=0 \quad \iff \quad x=3.$$

2. Imaginons que nous souhaitions résoudre $x^2=9$. Pour cela, nous allons utiliser l'identité remarquable a^2-b^2.

$$x^2=9 \quad \iff \quad x^2-3^2=0 \quad \iff \quad (x-3)(x+3)=0 \quad \iff \quad x=3 \quad \text{ou} \quad x=-3$$

9.3 Résolution d'inéquation et tableau de signe

L'utilisation de la factorisation intervient également dans la résolution d'inéquations produits. Avant de revenir sur ce thème, rappelons comment résoudre des inéquations de degré 1 (i.e. déterminer le signe d'une fonction affine $f(x) = ax + b$).

9.3.1 Tableau de signe

Nous rappelons ci-dessous, au travers d'un exemple, que le signe d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ dépend du signe du coefficient directeur a.

Exemple 9.3.1. Prenons la fonction $f(x) = -3x + 2$. Lorsque nous traçons son graphique nous constatons que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point $x = \frac{2}{3}$:

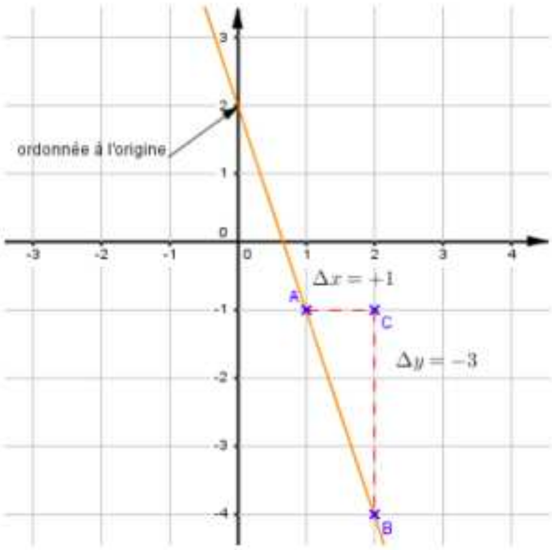

FIGURE 9.1 – Représentation de $f(x) = -3x + 2$

Par suite, la partie de la courbe se trouvant au dessus de l'axe $(0x)$ (i.e. là où $f(x) > 0$) débute lorsque $x < \frac{2}{3}$; la courbe se trouve sous l'axe des abscisses (i.e. $f(x) < 0$) lorsque $x > \frac{2}{3}$.

Tout ceci se résume facilement dans un tableau.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $-3x + 2$		$+$	0	$-$	

Tout ceci se vérifie aisément par le calcul en résolvant les inégalités $-3x+2>0$ et $-3x+2<0$.

Remarque. Si jamais nous avions la fonction $g(x)=3x+2$ nous n'aurions pas le même tableau de signe : cette fonction s'annule en $x=-\frac{2}{3}$ plutôt qu'en $x=\frac{2}{3}$ et les signes + et − sont échangés (par rapport à la fonction $f(x)=-3x+2$).

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $3x+2$		$-$	0	$+$	

Ceci provient du signe du coefficient directeur $a=3$:

$$3x+2\geq 0 \iff 3x\geq -2 \iff x\geq -\frac{2}{3}.$$

Remarque : le sens de l'inégalité est inchangé car nous avons divisé par le nombre $3>0$.

Ces résultats, combinés à une règle de signe évidente, permet de résoudre des inéquations produit. Voyons plutôt sur des exemples.

9.3.2 Signe d'un produit

Voici un premier exemple rappelant ce qui a déjà été vu dans un chapitre précédent.

Exemple 9.3.2. Résolvons l'inéquation $(x+1)(-2x+6)<0$. Pour cela, il suffit de résoudre séparément $x+1=0$ et $-2x+6=0$ pour ensuite dresser un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-2x+6$		$+$		$+$	0	$+$	
$(x+1)(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous lisons ensuite dans le tableau que $(x+1)(-2x+6)<0 \iff x\in]-\infty;-1[\cup]3:+\infty[$.

Voyons comment procéder en ajoutant une étape de factorisation. Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $36-4x^2\geq 0$.

1. Il est essentiel de factoriser l'expression précédente afin de se ramener à un produit de polynômes du premier degré :

$$36-4x^2\geq 0 \iff 6^2-(2x)^2\geq 0 \iff (6+2x)(6-2x)\geq 0$$

où nous avons utilisé l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ pour factoriser le membre de gauche.

2. Nous allons dresser un tableau de signe à partir de la proposition 17 qui va permettre de résoudre l'inégalité ci-dessus.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
signe de $6 - 2x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $6 + 2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(6 - 2x)(6 + 2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Commentons le tableau précédent. La proposition 17 permet d'obtenir le signe de la deuxième et troisième ligne. La dernière ligne est obtenue en utilisant la règle suivante :

$$+ \times + = +, \quad + \times - = - \quad \text{et} \quad - \times - = +.$$

Cette dernière ligne fournit donc le signe du produit $(6 - 2x)(6 + 2x)$. Ainsi, la solution de notre inégalité est l'intervalle $[-3; 3]$. Autrement dit,

$$36 - 4x^2 \geq 0 \iff x \in [-3; 3]$$

Remarque. Si jamais nous avions plusieurs facteurs supplémentaires, nous aurions rajouté autant de lignes au tableau pour ensuite appliquer la règle des signes.

9.4 Bilan du chapitre

Voici les compétences à maitriser dans ce chapitre.

- Utilisation de la règle du produit nul pour résoudre une équation.
- Utilisation d'un tableau de signe pour résoudre une inéquation.
- Utiliser la forme la plus adaptée pour résoudre un problème (factorisée, développée).

9.5 Exercices potentiels

- Factorisation : $27, 30, 31p96$, $37p97$
- Inéquations : $43p97$ $51, 53, 55, 56p98$ et $62p99$
- Modélisation : $73p99$