Chapitre 9

Loi de Bernoulli

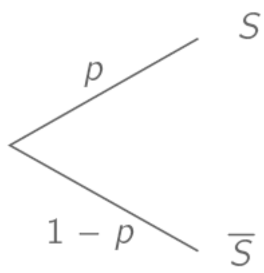
Voici un nouveau chapitre de probabilité. Dans celui-ci, nous allons étudier des expériences aléatoires relativement simples et verrons ce qui se produit lorsque nous répétons, dans les mêmes conditions, ces expériences.

Voici le genre d'expériences aléatoires qui va être au coeur du chapitre.

9.1 Epreuve de Bernoulli

Définition 9.1.1. *Soit* $\in [0,1]$*, une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire comportant deux issues : un succès de probabilité* p *et un échec de probabilité* $1-p$*.*

Remarque. De manière schématique, cela peut se représenter par un arbre pondéré :



où S désigne l'issue appelée « succès ».

Voyons quelques exemples d'épreuves de Bernoulli.

Exemple 9.1.1. 1. Le Jeu de pile ou face (avec une pièce équilibrée) est une épreuve de Bernoulli car elle ne présente que deux issues. Si on désigne le succès S par le fait d'obtenir pile alors $\mathbb{P}(S) = p = \frac{1}{2}$.

2. Un sac contient 10 boules, indiscernables au touché, numérotées de 1 à 10. L'expérience aléatoire consiste à tirer une boule du sac. Le joueur gagne si le numéro est inférieur ou égale à 3. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle le succès est « obtenir un numéro inférieur à 3 »de probabilité $p = \frac{3}{10}$; l'échec est l'évènement « obtenir un numéro strictement supérieur à 3 »sa probabilité vaut $1 - 0,3 = 0,7$.

3. De nombreux exemples sont envisageables : jouer au loto (on gagne le gros lot ou non), conduire une voiture (avoir un accident ou non),...

Dans cette partie, il est donc essentiel :

- identifier l'expérience aléatoire correspondant à l'épreuve de Bernoulli,
- déterminer la probabilité p de ce que l'on a appelé « succès ».

Remarquons enfin que la notion de succès n'est pas forcément celle que l'on utiliserait en français.

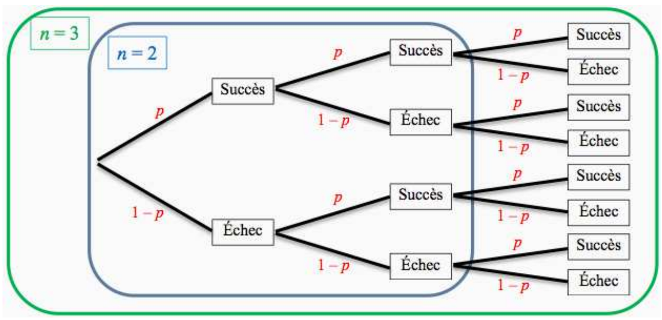
Exemple 9.1.2. Supposons qu'un industriel fabrique des ampoules. Pour chaque ampoule, il effectue l'épreuve de Bernoulli suivante : ou bien l'ampoule a un défaut ou bien elle n'en a pas. Il semble naturel que l'industriel cherche à identifier les ampoules défectueuses. C'est donc normal de définir le succès comme étant l'évènement « l'ampoule a un défaut ».

9.2 Schéma de Bernoulli

Reprenons l'exemple de l'industriel qui cherche à identifier les ampoules présentant un défaut. Après avoir effectuer son test pour la première ampoule, il parait naturel qu'il recommence à nouveau pour les autres ampoules afin de passer son stock en revu. Ce procédé porte le nom de schéma de Bernoulli.

Définition 9.2.1. *Considérons une épreuve de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(S) = p \in [0;1]$. Un schéma de Bernoulli est la répétition de cette épreuve de Bernoulli de façon* ***indépendante*** *(autrement dit, il est supposé que le résultat d'une épreuve n'affecte pas le résultat des autres).*

Remarque. Schématiquement, un schéma de Bernoulli consiste à agrandir l'arbre autant de fois que de répétitions (ci-dessous 2 et 3 répétitions) :



Par la suite, nous utiliserons les notations S : « succès » et $\bar{S}$: « échec ».

Voyons quelques exemples de schéma de Bernouilli.

Exemple 9.2.1. 1. Reprenons l'exemple de l'industriel et supposons que la probabilité qu'une ampoule soit défectueuse soit égale à $0,003$ (autrement dit $\mathbb{P}(S) = 0,003$). Si l'industriel test son stock de 4 000 ampoules, il s'agit d'un schéma de Bernoulli avec 4 000 répétitions.

2. Un sac contient 10 boules, indiscernables au touché, numérotées de 1 à 10. Le joueur tire successivement et avec remise 4 boules du sac (on remet la boule obtenue dans le sac après chaque tirage). Le joueur gagne si le numéro est inférieur ou égale à 3.

   Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à trier une boule du sac ; le succès correspond à obtenir « un numéro inférieur ou égale à 3 »avec $p = 0,3$. Cette épreuve est répétée quatre fois de façon indépendantes (puisque les tirages sont avec remise). Il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

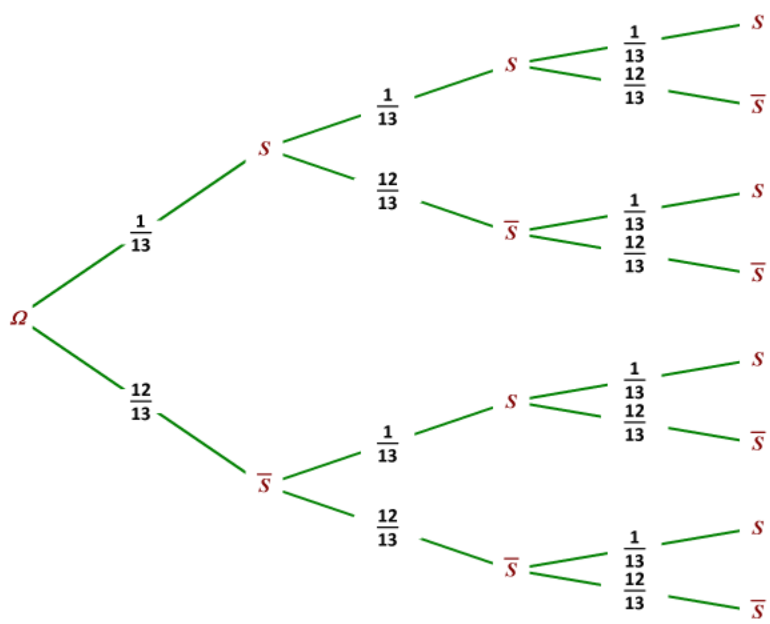
Maintenant que les définitions ont été donné et illustré, il est important de maitriser les propriétés suivantes.

Propriétés 1.
- Un schéma de Bernoulli est représenté par un arbre pondéré.
- Sur chaque branche de l'arbre est écrite la probabilité associée.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur les branches.

Voyons un exercice typique du chapitre.

Exemple 9.2.2. Supposons que nous ayons à disposition un sac contenant 1 boule noire et 12 boules rouges ; ces boules sont supposées indiscernables au touché. Nous tirons une boule au hasard dans le sac, notons sa couleur puis replaçons la boule dans le sac. Nous répétons ce tirage trois fois de suite et appelons succès le fait d'obtenir une boule rouge.

1. Il s'agit bien d'une épreuve de Bernoulli puisque l'expérience aléatoire ne comporte que deux issues (on obtient une boule noire ou une boule blanche). Comme les boules sont indiscernables au touché, nous savons que $\mathbb{P}(S) = \frac{1}{13}$.
2. Ensuite, il convient de représenter la situation à l'aide d'un arbre.



3. Grâce à cet arbre, nous pouvons déterminer la probabilité d'obtenir 3 boules noires. Il est facile de réaliser que cet évènement correspond au chemin le plus bas dans l'arbre (i.e. obtenir $\bar{S}\bar{S}\bar{S}$). Nous avons donc
$$\mathbb{P}(\text{obtenir trois boules noires}) = \frac{12}{13} \times \frac{12}{13} \times \frac{12}{13} \approx 0,786$$
Nous avons multiplier entre elles les probabilités apparaissant sur le chemin correspondant à l'évènement « obtenir trois boules noires ».
4. Imaginons que nous souhaitons calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches. Nous constatons que plusieurs chemins correspondent à cet évènement : le chemin $SS\bar{S}$, le chemin $S\bar{S}S$ et le chemin $\bar{S}SS$. Pour chacun d'entre eux, nous obtenons les probabilités suivantes :
$$\mathbb{P}(SS\bar{S}) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} \times \frac{12}{13} \approx 0,005 \quad ; \quad \mathbb{P}(S\bar{S}S) = \frac{1}{13} \times \frac{12}{13} \times \frac{1}{13} \approx 0,005$$

et

$$\mathbb{P}(\bar{S}SS) = \frac{12}{13} \times \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} \approx 0,005$$

Enfin, pour déterminer la probabilité de l'évènement « obtenir deux boules blanches » il suffit d'additionner ces trois résultats :

$$\mathbb{P}(\text{obtenir deux boules blanches}) = \mathbb{P}(SS\bar{S}) + \mathbb{P}(S\bar{S}S) + \mathbb{P}(\bar{S}SS) \approx 3 \times 0,005 = 0,015.$$

5. Enfin, il est possible qu'on nous demande quelle est la probabilité de l'évènement : « obtenir au moins une boule noire ». En réfléchissant, nous voyons qu'il y a de nombreuses possibilités (obtenir 1 boule noire, obtenir 2 boules noires ou obtenir 3 boules noires). Nous pourrions procéder comme dans le point précédent mais cela serait un peu laborieux. Mieux vaut utiliser un argument qui utilise une formule vue en seconde (pour tout évènement A, nous avons l'égalité $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{obtenir au moins une boule noire}) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{\text{obtenir au moins une boule noire}}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{ne pas obtenir de boule noire}) \approx 1 - 0,768 = 0,232\end{aligned}$$

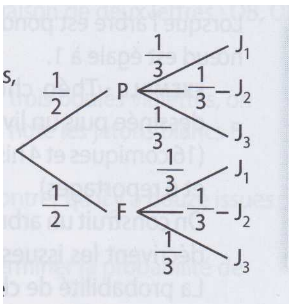
d'après le résultat obtenu à une des questions précédentes.

9.3 Evènements indépendants

Bien entendu, l'étude faite précédemment peut se généraliser, à partir de plusieurs expériences indépendantes, de la manière suivante.

Exemple 9.3.1. Lucie joue au jeu suivant : elle lance une pièce de monnaie et note la face obtenue (P ou F) puis tire au hasard un des trois jetons d'un sac, notés J_1, J_2 et J_3, et note le jeton obtenu.

1. Voici l'arbre modélisant la situation décrite plus haut



Les issues possibles correspondent aux événements rencontrés sur les chemins de l'arbre :

$$PJ_1 \quad ; \quad PJ_2 \quad ; \quad PJ_3 \quad ; \quad FJ_1 \quad ; \quad FJ_2 \quad ; \quad FJ_3.$$

L'important est que la manière de calculer la probabilité associée à un chemin s'effectue comme auparavant en multipliant les poids rencontrés le long du chemin. Par exemple,

$$\mathbb{P}(PJ_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$