0.0.1 Correction des exercice 5.

La résolution de ces exercices s'effectue comme pour les exercices $1, 2, 3$ et 4.

Exercice 1. 1. La régression linéaire, étudiée dans ce chapitre, est pertinente lorsqu'il existe une relation affine entre deux variables (i.e. les points semblent alignés). Dans cet exemple, lorsqu'on dessine le nuage de points on obtient la forme suivante

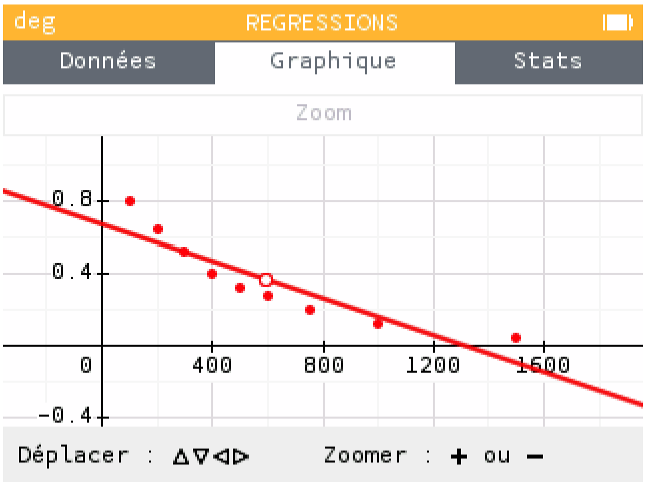

FIGURE 1 – $R(t_i)$ en fonction de t_i

Les points ne sont pas alignés et la courbe suggérée semble plutôt correspondre à celle d'une exponentielle de la forme $f(x) = e^{-\lambda x}$ avec λ proche de 0. Il n'est donc pas pertinent de procéder directement à de la régression linéaire. Notons au passage que si nous l'avions fait, nous aurions trouvé le coefficient de corrélation suivant

$$r_1 \approx -0,908.$$

2. Après avoir calculer les valeurs y_i, nous obtenons le tableau suivant :

t_i	100	200	300	400	500	600	750	1 000	1 500
y_i	-0,22	-0,44	-0,65	-0,91	-1,13	-1,27	-1,60	-2,12	-3,21

Cette fois-ci le nuage de points a une allure beaucoup plus satisfaisante puisque les points semblent alignés :

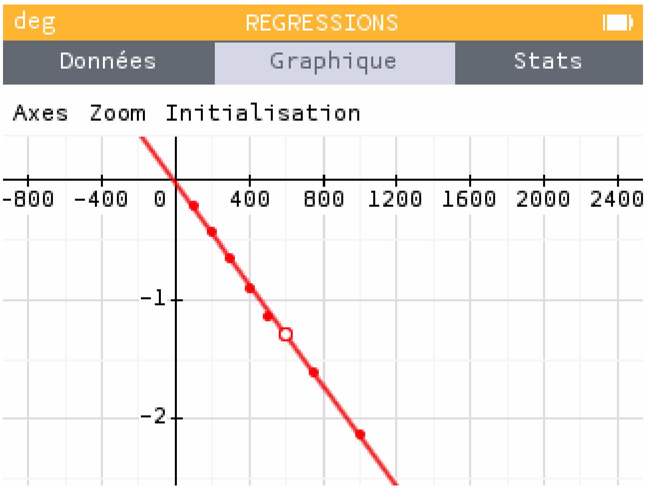

FIGURE 2 – y_i en fonction de t_i

3. La calculatrice nous fournit le coefficient de corrélation de cette nouvelle série statistique : $r_2 \approx -0.999$. Cette valeur est plus proche de -1 que r_1, c'est donc que notre régression est de meilleure qualité.
4. A l'aide de la calculatrice, nous trouvons (après avoir arrondi à 10^{-3}) que

$$a \approx -0,002 \quad \text{et} \quad b \approx -0,025$$

tels que la droite $\mathcal{D}$ admette une équation de la forme $y = at + b$.

5. A partir de la question 2 nous avons procédé à un changement de variable ($y = \ln R(t)$) pour ensuite faire de la régression linéaire entre les variables y_i et t_i. Il faut à présent trouver une expression de $R(t)$ en fonction de t.

$$\begin{aligned}
y = at + b \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln R(t) = at + b && \big(\textit{par définition} \quad y = \ln R(t)\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \exp\big[\ln R(t)\big] = \exp(at + b) && (\textit{en appliquant la fonction} \quad x \mapsto \exp x) \\
&\Longleftrightarrow \quad R(t) = \exp(at + b) && (\textit{puisque} \quad x \mapsto \exp x \quad \textit{« annihile »} \quad x \mapsto \ln x) \\
&\Longleftrightarrow \quad R(t) = e^{b} \times e^{at} && (\textit{d'après les propriétés de} \quad x \mapsto \exp x) \\
&\Longleftrightarrow \quad R(t) = e^{-0{,}025} \times e^{-0{,}002t} && (\textit{d'après la question précédente})
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $k = e^{-0{,}025}$ et $\lambda = 0,002$, nous avons montré que $R(t) = ke^{-\lambda t}$.

6. Pour cette question, il suffit de remplacer k par 1 et de calculer $R(900)$. On trouve alors que

$$R(900) = e^{-0{,}002 \times 900} \approx 0,165.$$

Autrement dit, après 900 heures de fonctionnement $16,5\%$ des équipements sont encore en service.