

0.1 Correction (séance du 24/03)

Exercice. Des algues prolifèrent dans un étang. Pour s'en débarrasser, le propriétaire installe un système de filtration. En journée, la masse d'algues augmente de 2% puis, à la nuit tombée, le propriétaire actionne pendant une heure le système de filtration qui retire 100 kg d'algues. On admet que les algues ne prolifèrent pas pendant la nuit.

Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est de 2000 kg. On modélise par a_n la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant n jours.

1. A quoi correspond la masse d'algues présente dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration ?
2. Calculer a_1 et a_2 . Interpréter les résultats obtenus.
3. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. A l'aide d'une calculatrice, déterminer la masse d'algues encore présente après une semaine de traitement. On donnera une valeur arrondie à l'unité.
5. Au bout de combien de jours, la masse d'algues est-elle inférieure à 1200 kg ?

Correction :

1. D'après le texte, $a_0 = 2000$.
2. Pour calculer a_1 , il faut procéder en 2 temps :
 - (a) Calculer la quantité d'algues après l'augmentation de 2% :

$$2000 \times (1 + 0,02) = 2040$$
 - (b) Soustraire à cela 100 kg.
 - (c) En résumé, $a_1 = 1940$ kg. Ce qui correspond à la quantité d'algues présentes le premier jour (après l'installation du système de filtrage)
3. Pour calculer a_2 , il suffit de reprendre les calculs précédents à partir de $a_1 = 1940$:
 - (a) Calculer la quantité d'algues après l'augmentation de 2% :

$$1940 \times (1 + 0,02) = 1978,8$$
 - (b) Soustraire à cela 100 kg.
 - (c) En résumé, $a_2 = 1878,8$ kg. Ce qui correspond à la quantité d'algues présentes le deuxième jour (après l'installation du système de filtrage)
4. Pour déterminer a_{n+1} , il faut utiliser la même méthode de calcul
 - (a) Calculer la quantité d'algues après l'augmentation de 2% à partir de la précédente valeur a_n :

$$a_n \times (1 + 0,02) = 1,02a_n.$$
 - (b) Soustraire à cela 100 kg.

En résumé, nous avons $a_{n+1} = 1,02 \times a_n - 100$.

5. Un moment de réflexion montre que nous devons déterminer a_7 . Pour cela, il convient de se référer au tutoriel disponible à l'adresse suivante https://www.youtube.com/watch?v=D50Ai2_h_bw. En procédant de la même manière, nous trouvons que

$$a_7 = 1554$$

après avoir arrondi à l'unité.

6. Pour cette question, il faut utiliser le tableau de valeurs obtenues dans la question précédente. Nous cherchons le jour à partir duquel la masse d'algues est inférieure à 1 200 kg. Cela revient à trouver le premier indice n tel que

$$a_n < 1\,200$$

En cherchant cette valeur dans la colonne de droite, on constate que cela se produit entre les indices 11 et 12 (on passe de 1 269,877 à 1 195,275). Ainsi, cela se produit dans la nuit du 5^{ème} jour de la deuxième semaine.