

DM : fonction exponentielle

Exercice 1. En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les équations/inéquations suivantes :

1.

$$\frac{e^{3x-1}}{e^{4x+4}} = e^{-4x+2}.$$

2.

$$\frac{e^{2x+1}}{(e^x)^3} \geq 1.$$

Exercice 2. Dans cet exercice, nous nous intéressons à l'évolution du taux d'alcool dans le sang d'un individu après ingestion d'une boisson alcoolisée. Ce taux est donné en $g \cdot L^{-1}$. Une étude sur un jeune homme de 64 kg ayant ingéré une dose de 33 g d'alcool a permis d'établir que le taux d'alcool dans son sang, en fonction du temps t (en heure), est donné par la fonction $f : [0, 0,25; +\infty[$ par

$$f(t) = (2t - 0,05)e^{-t}.$$

1. Un taux d'alcool dans le sang inférieur à $0,001 g \cdot L^{-1}$ est considéré comme négligeable. A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien de temps le taux d'alcool dans le sang du jeune homme est négligeable.
2. Montrer que, pour tout $t \in [0, 0,25; +\infty[$, la dérivée f' de f est donnée par

$$f'(t) = (2,05 - 2t)e^{-t}.$$

3. Etudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0, 0,25; +\infty[$. En déduire les variations de f sur cet intervalle.
4. A l'aide de la question précédente déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée au centième du taux maximum d'alcool dans le sang de ce jeune homme.

Exercice 3. Nous supposons que la population de la ville de Gougnan, depuis sa création en 2019, augmentera chaque année de 5%. En 2019, cette ville comptait 500 habitants.

Partie A :

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite telle que u_n représente le nombre d'habitants de Gougnan en 2019 + n .

1. Combien vaut u_0 ? Déterminer la valeur de u_1 .
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$? Préciser la valeur des paramètres associés.

Partie B :

Nous souhaitons également modéliser la population par une fonction f dérivable sur $[0; +\infty[$. Nous affirmons que cette fonction est de la forme $f(t) = ke^{0,05t}$ avec $k \in \mathbb{R}$ une constante.

1. Quelle valeur choisir pour k ? Justifier votre réponse.
2. Calculer le rapport $\frac{f(t+\frac{1}{12})}{f(t)}$. A quoi correspond le résultat obtenu? Est-il possible d'obtenir ceci avec la suite $(u_n)_{n \geq 0}$?