0.1 Exercices chapitre 8 : suites (1ère partie)

0.1.1 Généralités sur les suites

Exercice 1. On donne les dix premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$:

$$4 \quad ; \quad -1 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 7 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 11 \quad ; \quad 2$$

Nous savons que $v_1 = 4$.

1. Préciser les valeurs de v_3 et v_7.
2. Quels sont les termes dont la valeurs est égale à 2 ?

Exercice 2. On construit une suite de carré : la premier carré a pour côté 1 carreau, le deuxième 2 carreau, le troisième 3 carreau, etc. On note par a_1 l'aire du premier carré, a_2 l'aire du deuxième carré, etc.

1. Préciser la valeur de a_1, a_2, a_3 et a_5.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, quelle est la longueur d'un côté du n-ième carré ? En déduire la valeur de a_n.
3. A l'aide la question précédente, déterminer la valeur de a_11.
4. Représenter graphiquement les points A_n de coordonnées $(n; a_n)$ pour n allant de 1 à 5.

Exercice 3. Soit u_n la suite définie par $u_n = n^2 + n$. Déterminer la valeurs de u_0, u_1 et u_3.

Exercice 4. Soit t_n la suite définie par $t_{n+1} = 2t_n + 3$ avec $t_0 = 3$.

1. Déterminer la valeurs de t_1, t_2 et t_3.
2. Pour calculer t_{11}, quels calculs devez-vous avoir fait au préalable ?

Exercice 5. Le tableau suivant donne le dernier cours de l'action d'une entreprise lors des sept dernière années.

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Cotation	7,90	10,28	15,17	26,67	33,80	64,14	70,48

On note c_n la côte de l'action à l'année $2012 + n$.

1. Que représente c_0 ? Quelle est sa valeur ?
2. Donner la valeurs des six premiers termes suivants de la suite.

Exercice 6. L'algorithme ci-dessous, définit une suite à partir de son premier rang.

$U \leftarrow 4$
Pour i variant de 1 à N faire :
$U \leftarrow 4U - 3$
Fin Pour

1. Si $N = 2$, quelle sera la valeur de U après exécution de l'algorithme ?
2. Quelle valeur faut-il donner à N pour obtenir le cinquième terme de la suite ?

0.1.2 Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 7.

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 4$. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 8$ et de raison $r = 1,5$. Déterminer v_1, v_2 et v_3.

Exercice 8.

1. On donne les premiers termes d'une suite $(w_n)_{n\geq 0}$:

$$w_0 = 5 \quad ; \quad w_1 = 2 \quad ; \quad w_2 = -2 \quad ; \quad w_3 = -5$$

   Justifier que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ n'est pas arithmétique.
2. On donne les premiers termes d'une suite $(t_n)_{n\geq 0}$:

$$t_0 = 1 \quad ; \quad t_1 = 2 \quad ; \quad t_2 = 4 \quad ; \quad t_3 = 6$$

   Justifier que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ n'est pas géométrique ?

0.1.3 Modélisation

Exercice 9. Des algues prolifèrent dans un étang. Pour s'en débarrasser, le propriétaire installe un système de filtration. En journée, la masse d'algues augmente de 2% puis, à la nuit tombée, le propriétaire actionne pendant une heure le système de filtration qui retire 100 kg d'algues. On admet que les algues ne prolifèrent pas pendant la nuit.

Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étant au matin de l'installation du système de filtration est de 2 000 kg. On modélise par a_n la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant n jours.

1. A quoi correspond la masse d'algues présente dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration ?
2. Calculer a_1 et a_2. Interpréter les résultats obtenus.
3. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. A l'aide d'une calculatrice, déterminer la masse d'algues encore présente après une semaine de traitement. On donnera une valeur arrondie à l'unité.
5. Au bout de combien de jours, la masse d'algues est-elle inférieur à 1200 kg ?

Exercice 10. Dans un quartier d'une petite ville, les services de Pôle emploi ont relevé le nombre de demandeurs d'emploi chaque trimestre. Après observations, ils constatent qu'en moyenne, chaque trimestre, 123 nouveaux demandeurs d'emploi s'inscrivent tandis que 37,5% des chômeurs trouvent un emploi et sont retirés des listes.

Au début du premier trimestre 2019 (1er janvier 2019), il y avait 490 demandeurs d'emploi. On note d_n le nombre de demandeurs d'emploi au début du n-ième trimestre après le $1er$ janvier 2019. Dans tout l'exercice, les valeurs seront arrondies à l'unité.

1. Que vaut d_1 ?
2. Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début du deuxième et du troisième trimestre 2019.
3. Justifier que l'on peut modéliser la situation précédente par la relation

$$d_{n+1} = 0,625d_n + 123 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

4. Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début du deuxième trimestre de 2021.
5. Le directeur de l'agence pourra-t-il atteindre son objectif de diminuer le nombre de demandeurs d'emploi de 30% par rapport au premier trimestre 2019 ? Si oui, indiquer à quelle date son objectif sera atteint. Justifier la réponse.

Exercice 11. En janvier 2019, une entreprise renouvelle son parc de tablettes tactiles. La tablette choisie affiche une autonomie de 8 heures. Une étude montre que l'autonomie de la batterie baisse de 15% chaque année d'utilisation. Soit $n \in \mathbb{N}$, on modélise le nombre d'heures d'autonomie de cette tablette pour l'année $2019 + n$ par une suite $(a_n)_{n \geq 0}$.

1. Que vaut a_0 ?
2. Déterminer l'autonomie de la batterie en 2020 puis en 2021.
3. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
4. Déterminer l'autonomie de la batterie en 2023.
5. Déterminer à l'aide d'une calculatrice l'autonomie de la batterie en 2030.

0.1.4 Entrainement *E3C*

Exercice 12. L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine. Il peut cependant être dangereux lorsqu'on le reçoit en grande quantité.
On considère un échantillon d'une population d'iode 131 comportant 10^6 noyaux au début de l'observation. On considère que le nombre de noyaux diminue chaque jour de $8,3\%$. On note u_n le nombre de noyaux de cet échantillon au bout de n jours. On a donc $u_0 = 10^6$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
3. Déterminer le nombre de noyaux d'iode 131 présents dans l'échantillon au bout de 5 jours.
4. On considère la fonction Python ci-contre.

```
def iode():
    n=0
    u=10**6
    while u>10**6/2 :
        n=n+1
        u=0,917*u
        return(n)
```

   (a) A quoi correspond la valeur n retournée par cette fonction ?
   (b) Si on exécute cette fonction, quelle valeur obtient-on ?
   (c) Déterminer à partir de combien de jours la population de noyaux aura diminué au mois de moitié. *Cette durée s'appelle la demi-vie de l'iode* 131.

5. Pour le césium 137, le nombre de noyaux diminue chaque année de $2,3\%$. Quelles modifications faut-il apporter à la fonction précédente pour trouver la demi-vie du césium 137 sachant que la population de départ est de 10^8 noyaux.

Exercice 13. Au 1er janvier 2019, Antoine installe $20\,m^2$ de panneaux photovoltaïques à son domicile. Pour estimer la rentabilité de cette installation, il utilise la documentation suivante :

En France, $1\,m^2$ *de panneaux photovoltaïques correctement orientés produit environ* $95kWh/an$*. La première année, une installation produit effectivement cette quantité et on estime que la perte de rendement est de* 3% *par an.*

Pour tou entier $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année $2019 + n$.

1. (a) Quelle est la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année 2019 ? durant l'année 2020 ?
   (b) A partir de la question précédente, donner la valeur de u_0.
   (c) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (d) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\geq}$? Préciser ses éléments caractéristiques.

2. Pour calculer les termes successifs de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, Antoine utilise la fonction Python ci-dessous :

```
def production(n):
    u=... %valeur initiale
    k=0
    while k<n :
        u=...   %calcul par récurrence
        k=k+1
    return(u)
```

   Recopier et compléter le programme de cette fonction et vérifier que lorsqu'on appelle *production(0)* et *production(1)* on retrouve les valeurs obtenues à la question 1.

3. Modifier la nouvelle fonction donnée ci-dessous afin qu'elle serve à déterminer à partir de quelle année l'installation aura perdu plus de la moitié de son rendement.

```
def rendement() :
    r=... %rendement initial
    n=0
    while r>.../2 :
        r=... %calcul par récurrence
        n=n+1 % compteur d'années
    return(n)
```