Rappels sur les racines carrées

1 Définition

Définition 1.1. *Soient d et c deux nombres* ***positifs****. Nous dirons que c est la racine carrée de d si l'égalité suivante est satisfaite*

$$c^2 = d.$$

Il est usuel de noter c par $\sqrt{d}$.

Exemple 1.1.
1. $\sqrt{4} = 2$ puisque $2^2 = 4$. Puisque $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$, nous dirons que que 4 est un carré parfait.
2. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ car $(2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4(\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$. Pour cet exemple, 8 n'est pas un carré parfait car $2\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 1.
1. Parmi les écritures suivantes, entourer celles qui sont correctes :

$$\sqrt{7} \quad ; \quad \sqrt{-7} \quad ; \quad \sqrt{7^2} \quad ; \quad \sqrt{(7)^2} \quad ; \quad \sqrt{-7^2} \quad ; \quad \sqrt{-7}^2 \quad ; \quad -\sqrt{7} \quad ; \quad \sqrt{(-7)^2}$$

2. Parmi les nombres suivants, entourer ceux qui sont égaux à 5 et souligner ceux qui sont égaux à -5 :

$$\sqrt{25} \quad ; \quad -\sqrt{25} \quad ; \quad \sqrt{(-5)^2} \quad ; \quad -(\sqrt{5})^2 \quad ; \quad -\sqrt{(-5)^2} \quad ; \quad (-\sqrt{5})^2 \quad ; \quad -\sqrt{5^2} \quad ; \quad \sqrt{5}^2$$

2 Propriétés de la racine carrée

Voyons quelles sont les propriétés vérifiées par la racine carrée.

Proposition 2. *Si $a, b \in \mathbb{R}_+$ alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.*

Démonstration. Pour démontrer cette égalité, il suffit de vérifier que $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = ab$. Or

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = ab.$$

□

Remarque.
1. Il est important d'observer que cette propriété n'est valable que **pour la multiplication.** En effet, en général,

$$\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \neq \sqrt{\mathbf{a}} + \sqrt{\mathbf{b}}.$$

Ceci peut être démontrer à l'aide d'un contre-exemple. Si $a = 9$ et $b = 16$ nous avons, d'une part

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

et d'autre part

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

Comme nous allons le voir, la proposition 2 est très utile pour **simplifier des racines carrées.**

Exemple 2.1. Appliquons la proposition 2 pour simplifier les racines carrées suivantes.

1. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
2. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Remarque. Pour simplifier la racine carrée d'un nombre il suffit donc d'écrire ce nombre sous la forme d'un produit impliquant des carrés parfaits (4 ou 25 ci-dessus).

Voici quelques exercices d'entrainement.

Exercice 3. 1. Ecrire les nombre suivants sous la forme $a\sqrt{3}$ avec $a \in \mathbb{N}$.

$$A = \sqrt{75} \quad ; \quad B = \sqrt{147} \quad ; \quad C = \sqrt{432} \quad ; \quad D = \sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{243}$$

2. Ecrire les nombre suivants sous la forme $a\sqrt{5}$ avec $a \in \mathbb{N}$.

$$E = \sqrt{125} \quad ; \quad F = \sqrt{980} \quad ; \quad G = \sqrt{405} \quad ; \quad H = 2\sqrt{270} - 5\sqrt{20} + 6\sqrt{280}$$

Exercice 4. 1. Ecrire les nombre suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ et b le plus petit possible.

$$I = \sqrt{288} \quad ; \quad J = \sqrt{1250} \quad ; \quad K = 8\sqrt{175} + 2\sqrt{243} - 7\sqrt{112} \quad ;$$

$$L = \sqrt{45} \times 2\sqrt{150} \quad ; \quad M = \frac{\sqrt{84} \times \sqrt{45}}{\sqrt{15}} \quad ; \quad N = 9\sqrt{2} \times 7\sqrt{3} \times 2\sqrt{18} \quad ; \quad O = \sqrt{4+36} \times 3\sqrt{15}$$

3 Enlever une racine carrée du dénominateur

Il sera également important de savoir **supprimer une racine carrée d'un dénominateur**.

Exemple 3.1. Pour faire disparaitre une racine carrée d'un dénominateur, il suffit de multiplier la fraction au numérateur et dénominateur par cette même racine carrée. Voyons plutôt.

1. $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
2. $\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

4 Exercices supplémentaires

Voici quelques exercices additionnels pour ceux qui souhaitent s'entrainer. **Il est conseillé de traiter les exercices 5 à 7 en rapport avec le théorème de Pythagore** (déterminer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle).

Exercice 5. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 12$ et $AC = 5$. Déterminer la longueur BC.

Exercice 6. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 15$ et $BC = 17$. Déterminer la longueur AC.

Exercice 7. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Déterminer la longueur de la diagonale $[AC]$.

Exercice 8. 1. Effectuer les calculs suivants (les résultats seront donnés sous forme exacte et simplifiés).

$$a = \sqrt{3}(2\sqrt{3}-5) \quad ; \quad b = (\sqrt{6}+2)^2 \quad ; \quad c = (3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2 \quad ; \quad d = (2\sqrt{13}+7\sqrt{5})(7\sqrt{5}-2\sqrt{13})$$

2. Montrer que les nombres suivants sont des entiers :

$$e = 3\sqrt{54} - 7\sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{12} \quad ; \quad f = (2\sqrt{2})^4 \quad ; \quad g = (7\sqrt{5} - \sqrt{2})(7\sqrt{5} + \sqrt{2})$$

Exercice 9. 1. Ecrire les expressions suivantes sans radical (racine carrée) au dénominateur

$$h = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad ; \quad i = \frac{6}{2\sqrt{3}} \quad ; \quad k = \frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \quad ; \quad l = \frac{4\sqrt{8}-7}{2\sqrt{32}}$$

2. Montrer que $\sqrt{2}+1$ est l'inverse de $\sqrt{2}-1$.

Exercice 10. Ecrire les expressions suivantes sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}$ et c le plus petit possible :

$$m = (4\sqrt{7}+2)(3-\sqrt{7}) - 10\sqrt{7} \quad ; \quad n = \frac{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad o = (\sqrt{3}+5)^2 + (\sqrt{3}-5)^2$$