Exercices de révision pour les compositions

Attention : cette liste n'est pas exhaustive. Faire ces exercices ne vous dispense pas de réviser à travers le cours, les exercices, les DM et les DS déjà faits.

Fonctions Polynôme du second degré

Exercice 1

On donne trois formes d'une même fonction polynôme.

Forme 1 : $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{27}{4}$

Forme 2 : $f(x) = 3(x + 1)(x - 2)$

Forme 3 : $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$

1. Comment appelle-t-on chacune de ces formes ?
2. Vérifier que ces trois formes sont égales.
3. Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse à l'aide de l'une des formes précédentes de $f(x)$.

a. -6 est l'image de 0 par f.

b. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

c. $-\frac{27}{4}$ est le minimum de la fonction.

d. $f\left(\frac{1}{6}\right) = f\left(\frac{5}{6}\right)$

Exercice 2

Dresser le tableau de variation de la fonction f dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = 100 - 2(x - 50)^2$
2. $f(x) = -\frac{1}{4} + 3(x + 1)^2$
3. $f(x) = 0{,}6(x + 0{,}2)^2$
4. $f(x) = -2 - 6x^2 + \frac{1}{3}x$
5. $f(x) = x^2 + 7$

Exercice 3

Factoriser, si possible, les fonctions polynômes du second degré suivantes.

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$
2. $f(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}8x - 4{,}25$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$
4. $f(x) = 2x^2 + x\sqrt{2} - 1$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $-2x^2 + x - 1 = 0$
2. $2x^2 - 2x - 1 = 0$
3. $5x^2 - 2x + 1 = 0$
4. $2x^2 + 4 = -6x$
5. $x(2x - 1) = 1$
6. $x^2 = -5x - 1$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $x^2 - 0{,}4x + 0{,}04 \leqslant 0$
2. $-x^2 + 5x < 7$
3. $\frac{2}{3}x^2 \geqslant 4x - 6$

Suites Numériques

Exercice 1

ALGO

On considère la suite géométrique (u_n) dont chaque terme s'obtient grâce à la fonction Python suivante.

```python
def suite(n):
    u=150
    for k in range(1,n+1):
        u=2/3*u
    return u
```

1. Préciser le premier terme u_0 et la raison.
2. En déduire la formule explicite de u_n.
3. a. À la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0{,}01$.

b. Modifier la fonction précédente pour qu'elle réponde à la question **3. a.**

Exercice 2

Une solution contient cinq bactéries à l'instant $t = 0$. Après l'ajout d'un élément nutritif, le nombre de bactéries augmente de 25 % chaque seconde.

1. Écrire un algorithme qui donne le nombre de bactéries présentes dans la solution au bout de n secondes.
2. Au bout de combien de secondes le nombre de bactéries va-t-il dépasser 20 000 ?

Exercice 3

1) Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_4 = 54$ et $u_{19} = 15$. Calculer sa raison.

2) On donne la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2 \times 1{,}2^{n+2}$. Démontrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

Exercice 4

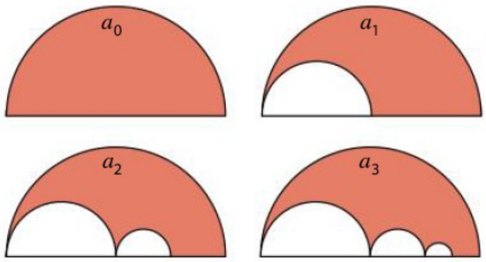
Calculer la somme $S=u_4+u_5+...+u_{13}$:

a) Dans le cas où (u_n) est une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme $u_0=37$.

b) Dans le cas où (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $u_0=1000$.

Exercice 5

Le premier demi-disque a pour rayon 1 cm. On passe d'une figure à l'autre en « enlevant » un demi-disque dont le rayon est la moitié du précédent.



Les aires rouges a_n (en cm^2) où n est le nombre d'étapes, constituent une suite.

1. Rappeler la formule permettant de calculer l'aire d'un demi-disque de rayon R.

2. Calculer a_0, a_1 et a_2.

3. ALGO PYTHON Compléter la fonction terme_a ci-dessous de sorte qu'elle renvoie le terme de rang n de la suite (a_n).

```
from math import*
def terme_a(n):
    rayon=1
    aire_grise=pi/2
    for k in range(n):
        rayon=rayon/2
        aire_grise=aire_grise-...
    return...
```

4. Programmer cette fonction puis conjecturer l'évolution de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra se référer au TP3 pour obtenir une représentation graphique de la suite (a_n).

Trigonométrie

Exercice 1

1) Tracer un cercle trigonométrique et placer les points-images des nombres :

$\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{-\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{4}$

2) En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus de $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-2\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{4}$.

Exercice 2

Pour chacune des questions suivantes, choisissez <u>la ou les</u> réponses qui vous semble(nt) correcte(s).

1) La fonction cosinus est :

a) π -périodique b) paire c) impaire d) 2π -périodique e) définie sur $\mathbb{R}$

2) L'équation $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ admet :

a) exactement deux solutions dans $[-\pi;\pi[$

b) $-\frac{2\pi}{3}$ comme solution

c) une seule solution dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

d) $\frac{7\pi}{6}$ comme solution

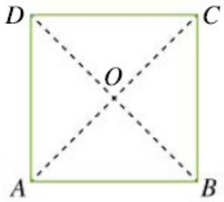
3) Si $\sin x=\frac{1}{3}$ alors :

a) $\cos x=\frac{2}{3}$ b) x a une seule valeur possible dans $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ c) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\frac{1}{3}$ d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{3}$

Produit Scalaire

Exercice 1

$ABCD$ est un carré de centre O et de côté a.



Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants.

a. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}$ **b.** $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$ **c.** $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$

d. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}$ **e.** $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ **f.** $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BD}$

Remarque : si cet exercice semble dur, considérer que $a=3$ et calculer les produits scalaires proposés.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB=4$ et $AD=2$. Soient E le point tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et F le milieu de $[CD]$.

1. Réaliser une figure.

2. a. En remarquant que $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$, démontrer que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=-AD^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$.

b. En déduire que les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires.

3. Montrer que les droites (EF) et (BD) sont perpendiculaires.

Exercice 3

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\,;1)$, $B\left(\frac{14}{5};\frac{17}{5}\right)$ et $C(5\,;1)$.

1. Calculer les produits scalaires suivants.

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **b.** $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ **c.** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

2. Le triangle ABC est-il rectangle ?

Exercice 4

Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$M(2\,;\,-2)$, $N(-3\,;1)$ et $P(1\,;2)$.

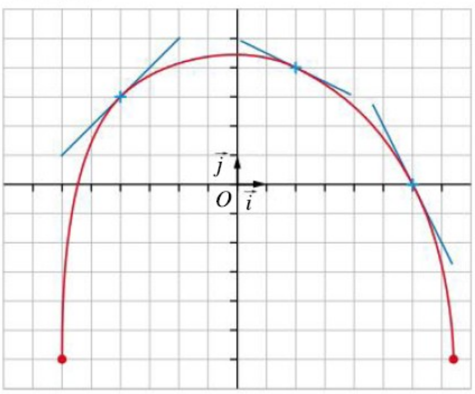
a. Calculer $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$.

b. En déduire une valeur exacte de l'angle $\widehat{PMN}$.

Dérivation et étude des variations

Exercice 1

La courbe représentative de la fonction f ainsi que trois de ses tangentes sont représentées ci-dessous.



• Déterminer graphiquement la valeur des nombres $f(-4)$, $f'(-4)$, $f(2)$, $f'(2)$, $f(6)$ et $f'(6)$.

Exercice 2

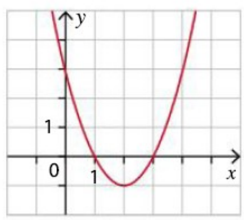
Calculer, en détaillant un peu vos calculs, les fonctions dérivées des fonctions ci-dessous, sur l'intervalle de dérivabilité donné :

1) $f(x)=(x^2+3x)\sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$.

2) $g(x)=2x^2-3+\dfrac{3}{1-x}$ sur $\mathbb{R}-\{1\}$

Exercice 3

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f' dérivée d'une fonction f.



• Déduire de cette représentation graphique le sens de variation de la fonction f.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f: x \longmapsto \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1) Déterminer la fonction f', dérivée de f sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2) Établir le tableau de variation de f.
3) Indiquer les extremums locaux de f en précisant leurs natures.
4) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
5) La courbe C_f admet-elle des tangentes horizontales ? Si oui, en quel(s) point(s) ?

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f: x \longmapsto \dfrac{x^2+8}{x^2+1}$.

1) Déterminer la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$
2) Établir le tableau de variation de f.
3) Indiquer les extremums locaux de f en précisant leurs natures.
4) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -1.
5) La courbe C_f admet-elle des tangentes parallèles à la droite (D) d'équation $y=3-2x$? Si oui, en quel(s) point(s) ?

Exercice 6

Associer chaque représentation graphique de fonction de la 1ère ligne au graphe de sa dérivée sur la 2ème ligne en justifiant les choix.