Séries chronologiques
-
Prévision par lissage exponentiel

Agnès LAGNOUX

lagnoux@univ-tlse2.fr

ISMAG1 - MI00141X

Introduction

Introduites par Holt en 1958, Winters en 1960 et popularisées par le livre de Brown en (1963), les méthodes de lissage constituent l'ensemble des techniques empiriques de prévision qui accordent plus ou moins d'importance aux valeurs du passé d'une série temporelle.

Les trois modèles ci-dessous seront traités dans ce chapitre :

- $\forall t \in \mathbf{Z}, \quad X_t = Z_t + \epsilon_t$;
- $\forall t \in \mathbf{Z}, \quad X_t = Z_t + S_t + \epsilon_t$.
- $\forall t \in \mathbf{Z}, \quad X_t = Z_t S_t + \epsilon_t$.

avec Z_t une série constante ou linéaire.

Le lissage exponentiel simple (LES)

Modèle considéré : $X_t = a + \epsilon_t$.

Soit $0 < \beta < 1$, on cherche la meilleure (au sens des MC pondérés) prévision cte $\hat{X}_T(h)$ i.e. la solution de

$$\min_a \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (X_{T-j} - a)^2.$$

Définition

La prévision de la série à l'horizon h, $\hat{X}_T(h)$, fournie par la méthode de lissage exponentiel simple est donnée par

$$\hat{X}_T(h) = (1-\beta) \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j}$$

où β est la constante de lissage.

Remarques sur le LES

1. si β est indépendant de h, on note $\hat{X}_T$ au lieu de $\hat{X}_T(h)$.
2. Cette méthode prend en compte tt le passé de la SC mais en accordant de - en - d'importance aux observations les plus éloignées de l'instant T.
3. La valeur de β permet de nuancer la remarque précédente :
   - β **proche de 0**, prévision souple i.e. fortement influencée par les observations les plus récentes.
   - $\beta = 0$, la prévision est alors égale à la dernière valeur observée.
   - β **est proche de 1**, prévision rigide i.e. l'influence des observations passées est d'autant plus importante et remonte loin dans le passé.
   - $\beta = 1$, alors toutes les prévisions sont identiques.

   En pratique, on prend $\beta \in]0, 1[$ afin d'exclure ces deux cas extrêmes dégénérés.

LES - Formules de mise à jour

A partir de la déf, on obtient la formule de mise à jour :

$$\hat{X}_T(h) = \beta\hat{X}_{T-1}(h)+(1-\beta)X_T = \hat{X}_{T-1}(h)+(1-\beta)(X_T-\hat{X}_{T-1}(h)).$$

Remarque

1. *1ère égalité :* $\hat{X}_T(h)=$ *barycentre entre* $\hat{X}_{T-1}(h)$. *La valeur prédite à l'horizon* h *à partir des* $T-1$ *premières observations et* X_T *la dernière observation.*
2. *2nde égalité fait intervenir* $(X_T - \hat{X}_{T-1}(h))$ *la dernière erreur de prévision.*
3. *Initialisation de la récurrence par* $\hat{X}_1(h) = X_1$ *ou la moyenne des observations.*

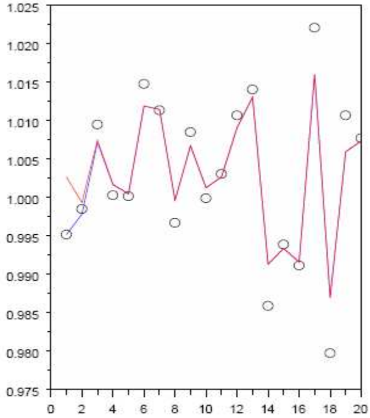

Figure: Influence de l'initialisation pour le lissage exponentiel simple : série temporelle initiale (cercle noir), séries lissées avec initialisation en X_1 (en bleu) ou $\bar{X}$ (en rouge) avec $\beta = 0.8$ (à droite) et avec $\beta = 0.2$ (à gauche).

LES - Choix du β

Un problème important en pratique est le choix du β qui est en général très subjectif et varie selon le contexte de l'étude et/ou le type de prévision souhaité. En pratique,

- si on veut une prévision rigide, on choisira $\beta \in [0.7; 0.99]$.
- si on veut une prévision souple, on choisira $\beta \in [0.01; 0.3]$.
- si on ne sait pas, une autre solution, dictée par les données, consiste à choisir β comme la solution

$$\sum_{t=1}^{T-h} \left(X_{t+h} - \hat{X}_t(h)\right)^2 = \left(X_{1+h} - \hat{X}_1(h)\right)^2 + \ldots + \left(X_T - \hat{X}_{T-h}(h)\right)^2.$$

Afin de ne pas tenir compte de l'initialisation, on minimise seulement

$$\sum_{t=[(T-h)/2]}^{T-h} \left(X_{t+h} - \hat{X}_t(h)\right)^2.$$

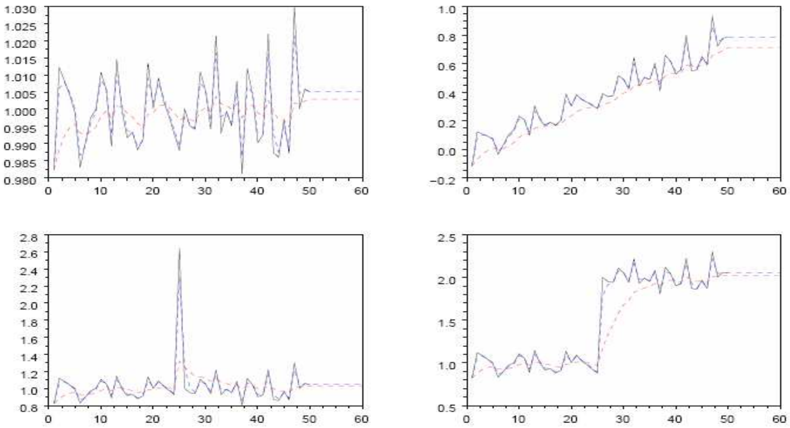

Figure: Influence de la constante de lissage pour le lissage exponentiel simple : série temporelle initiale (trait noir), séries lissées avec $\beta = 0.8$ (trait pointillé rouge) et avec $\beta = 0.2$ (trait pointillé bleu).

Le lissage exponentiel double (LED)

Modèle considéré : $X_t = a(t-T) + b + \epsilon_t$.

On cherche donc une prévision à l'horizon h, $\hat{X}_T(h)$ de la forme

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}_T h + \hat{b}_T,$$

où le couple $(\hat{a}_T, \hat{b}_T)$ minimise la fonction

$$\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j \left(X_{T-j} - (aj+b)\right)^2 .$$

En notant la série lissée S_1 et la série doublement lissée S_2 définies par

$$S_1(t) = (1-\beta)\sum_{j=0}^{t-1} \beta^j X_{t-j},\ S_2(t) = (1-\beta)\sum_{j=0}^{t-1} \beta^j S_1(t-j),$$

on déduit la définition suivante

LED - Définition

Définition

La prévision de la série à l'horizon h, $\hat{X}_T(h)$, fournie par la méthode de lissage exponentiel double est donnée par

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}_T h + \hat{b}_T$$

où β est la constante de lissage et le couple $(\hat{a}_T, \hat{b}_T)$ est donné par

$$\begin{cases} \hat{a}_T = \frac{1-\beta}{\beta}\left(S_1(T) - S_2(T)\right) \\ \hat{b}_T = 2S_1(T) - S_2(T) \end{cases}$$

LED - Formules de mise à jour

Les formules de mise à jour s'obtiennent à partir de ces expressions

$$\hat{a}_T = \hat{a}_{T-1} + (1-\beta)^2 \left(X_T - \hat{X}_{T-1}(1) \right),$$

et

$$\hat{b}_T = \hat{b}_{T-1} + \hat{a}_{T-1} + (1-\beta^2) \left(X_T - \hat{X}_{T-1}(1) \right).$$

Remarque

1. *Pour l'initialisation, on prend* $\hat{a}_2 = X_2 - X_1$ *et* $\hat{b}_2 = X_2$.
2. *On peut généraliser cette technique de lissage pour traiter des séries sans saisonnalité présentant une tendance polynômiale de degré supérieur à 2. Les résultats font intervenir, dans ce cas, les opérateurs de lissage d'ordre* p $S_p(t)$, $p \in \mathbb{N}$, *itérées d'ordre* p *de* $S_1(t)$.

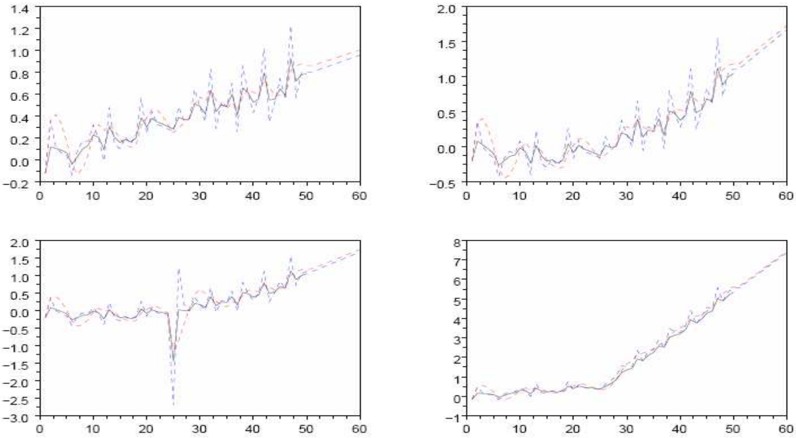

Figure: Influence de la constante de lissage pour le lissage exponentiel double : série temporelle initiale (trait noir), séries lissées avec $\beta = 0.8$ (trait pointillé rouge) et avec $\beta = 0.2$ (trait pointillé bleu).

La méthode de Holt-Winters (HW)

La méthode de lissage exponentiel double permet de traiter des séries présentant une tendance linéaire mais sans saisonnalité. On peut également définir des lissages exponentiels généralisés sur le même principe que les techniques décrites dans les sections précédentes permettant de traiter des séries avec saisonnalité.

Une méthode un peu différente a été introduite par Holt et Winters. Il existe une version non saisonnière de cette méthode, c'est-à-dire adaptée aux séries sans saisonnalité pouvant être ajustées par une droite au voisinage de T (comme pour le lissage exponentiel double). La différence entre la méthode de Holt-Winters et le lissage exponentiel double porte sur les formules de mise à jour.

La méthode non saisonnière de HW

Modèle considéré : $X_t = a(t-T) + b + \epsilon_t$.

Les mises à jour pour le LED s'écrivent aussi

$$\hat{a}_T = \frac{1-\beta}{2}\left(\hat{X}_T(1) - \hat{X}_{T-1}(1)\right) + \frac{1+\beta}{2}\hat{a}_{T-1},$$

et

$$\hat{b}_T = (1-\beta^2)X_T + \beta^2\left(\hat{X}_{T-1}(1) + \hat{X}_{T-1}(2)\right).$$

Ainsi écrits, $\hat{a}_T$ et $\hat{b}_T$ apparaissent comme des barycentres. Holt et Winters ont alors proposé les mises à jour suivantes :

$$\hat{a}_T = (1-\gamma)\left(\hat{X}_T(1) - \hat{X}_{T-1}(1)\right) + \gamma\hat{a}_{T-1},$$

et

$$\hat{b}_T = (1-\alpha)X_T + \alpha\left(\hat{X}_{T-1}(1) + \hat{X}_{T-1}(2)\right),$$

où $|\alpha| < 1$ et $|\gamma| < 1$.

La méthode non saisonnière de HW

Modèle considéré : $X_t = a(t - T) + b + \epsilon_t$.

L'initialisation peut se faire comme dans le cas du lissage exponentiel double.

L'avantage de cette approche est d'avoir une plus grande flexibilité mais la contrepartie est de devoir régler deux paramètres. Si α et γ sont proches de 1 tous les deux, la prévision est lisse (fort poids du passé).

La méthode saisonnière additive de HW

Modèle considéré : $X_t = (a(t-T)+b) + S_t + \epsilon_t$.

La méthode de Holt-Winters propose pour l'estimation de a, b et S_t les formules de mise à jour suivantes

$$\left\{\begin{array}{lcl} \hat{a}_T & = & (1-\beta)\hat{a}_{T-1} + \beta\left(\hat{b}_T - \hat{b}_{T-1}\right), \\ \hat{b}_T & = & \alpha\left(X_T - \hat{S}_{T-P}\right) + (1-\alpha)\left(\hat{b}_{T-1} + \hat{a}_{T-1}\right) \\ \hat{S}_T & = & \gamma\left(X_T - \hat{b}_T\right) + (1-\gamma)\hat{S}_{T-P} \end{array}\right.$$

où α, β et $\gamma \in]0,1[$.

On en déduit une prévision à l'horizon h

$$\hat{X}_T(h) = \left\{\begin{array}{ll} \hat{a}_T h + \hat{b}_T + \hat{S}_{T+h-P}, & \text{si} \quad 1 \leq h \leq P \\ \hat{a}_T h + \hat{b}_T + \hat{S}_{T+h-2P}, & \text{si} \quad P+1 \leq h \leq 2P \\ \dots & \end{array}\right.$$

La méthode saisonnière additive de HW

La première formule de mise à jour s'interprète comme une moyenne pondérée de la différence des niveaux estimés aux instants T et $T-1$ et la pente estimée à l'instant $T-1$.

La deuxième comme une moyenne pondérée de l'observation X_T (à laquelle on a retranché la composante saisonnière estimée à l'étape précédente) et l'estimation de la tendance faite à l'instant $T-1$.

La troisième comme une moyenne pondérée de l'observation X_T (à laquelle on a retranché le niveau calculé à l'instant T) et de la composante saisonnière calculée à l'instant $T-P$.

La méthode saisonnière additive de HW

Remarque

1. *Le choix des constantes de lissage dans la pratique peut s'effectuer de la même manière que précédemment, c'est-à-dire en minimisant la somme des carrés des erreurs de prévision.*
2. *On doit calculer les valeurs initiales pour utiliser les formules de mise à jour ci-dessus.*

La méthode saisonnière additive de HW

Exemple

Soit (X_t) *une SC observée jusqu'à l'instant* T *ayant une tendance linéaire et une compo sais de période 4. On souhaite appliquer la méthode de HW. Nous allons voir dans cet exemple comment initialiser les formules de mise à jour.*

1. *Proposer un modèle adapté.*
2. *Appliquer une moyenne mobile adaptée à la série afin de supprimer la saisonnalité. On obtient ainsi une estimation de la tendance linéaire.*
3. *Appliquer un opérateur adapté à la série transformée afin de récupérer le coefficeient* a*. L'estimer. En déduire une estimation du* b*.*
4. *En déduire une estimation du saisonnier.*

La méthode saisonnière multiplicative de HW

Modèle considéré : $X_t = (a(t-T)+b)S_t + \epsilon_t$.

La méthode de Holt-Winters propose pour l'estimation de a, b, S_t les formules de mise à jour suivantes

$$\begin{cases} \hat{a}_T &= (1-\beta)\hat{a}_{T-1} + (1-\beta)\left(\hat{b}_T - \hat{b}_{T-1}\right), \\ \hat{b}_T &= \alpha\frac{X_T}{\hat{S}_{T-P}} + (1-\alpha)\left(\hat{b}_{T-1} + \hat{a}_{T-1}\right) \\ \hat{S}_T &= \gamma\frac{X_T}{\hat{b}_T} + (1-\gamma)\hat{S}_{T-P} \end{cases}$$

où α, β et $\gamma \in]0,1[$.

La méthode saisonnière multiplicative de HW

Les formules de mise à jour s'interprètent comme dans le cas de la méthode saisonnière additive.

On en déduit une prévision à l'horizon h

$$\hat{X}_T(h) = \begin{cases} \left(\hat{a}_T h + \hat{b}_T\right) \hat{S}_{T+h-P}, & \text{si} \quad 1 \leq h \leq P \\ \left(\hat{a}_T h + \hat{b}_T\right) \hat{S}_{T+h-2P}, & \text{si} \quad P+1 \leq h \leq 2P \\ \ldots \end{cases}$$

Remarque

Pour l'initialisation, dans le cas d'une période 4, on détermine $\hat{b}_3$, $\hat{a}_4$ et $\hat{b}_4$ comme à la section précédente. De même les coefficients saisonniers initiaux sont obtenus comme précédemment mais en divisant les observations par la tendance linéaire.